Frank Klinker

Differentialrechnung

Teil 3: Weitere Beispiele, Rechenregeln und die Tangentengleichung

1 Beispiele: Die Ableitung der Potenzfunktionen

Wir hatten bereits ein erstes Beispiel für eine Ableitungsfunktion berechnet, nämlich für die Normalparabel $f(x) = x^2$:

$$\boxed{f(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2x}$$

Wir wollen uns nun zunächst einige weitere einfache Beispiele ansehen.

Anschließend wenden wir uns zwei einfache Regeln im Umgang mit Ableitungen zu.

Das beides hilft uns dann später, die Ableitungsfunktionen für **alle** ganzrationalen Funktionen mit einem einfachen Algorithmus zu bestimmen.

Aber zunächst einige weitere Beispiele:

Beispiel 1. Wir sehen uns die konstante Funktion $f(x) = 1$ an. Für diese haben wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1-1}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} 0 \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\boxed{f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 0}$$

Beispiel 2. Wir sehen uns die spezielle lineare Funktion $f(x) = x$ an. Für diese haben wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(x+t) - x}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} 1 \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

Zusammengefasst heißt das:

$$\boxed{f(x) = x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 1}$$

Beispiel 3. Wir sehen uns die spezielle kubische Funktion $f(x) = x^3$ an. Für diese haben wir

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(x+t)^3 - x^3}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2t + 3xt^2 + t^3 - \cancel{x^3}}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t}(3x^2 + 3xt + t^2)}{\cancel{t}} \\
&= \lim_{t \to 0} (3x^2 + 3xt + t^2) \\
&= 3x^2 \,.
\end{aligned}$$

Wir haben also:

$$\boxed{f(x) = x^3 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 3x^2}$$

Unsere bisherigen Beispiele fassen wir in der linken Tabelle zusammen:

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

$\xrightarrow{\text{etwas komplizierter}}$

$f(x)$	$f'(x)$
x^0	$0x^{-1}$
x^1	$1x^0$
x^2	$2x^1$
x^3	$3x^2$

In der rechten Tabelle kann man ein Bildungsschema erkennen und wir fassen das zusammen:

Die Potenzregel der Ableitung

$$\boxed{f(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

2 Die Summen- und Differenzenregel und die Faktorregel

Wir geben die Rechenregeln zunächst an und geben anschließend jeweils einige Beispiele.

Die Summen- bzw. Differenzenregel und die Faktorregel beim Ableiten

- Ist eine Funktion $f(x)$ selbst eine Summe (oder Differenz) zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$, dann ist die Ableitung $f'(x)$ die Summe (oder Differenz) der Ableitungsfunktionen $g'(x)$ und $h'(x)$:

  $$\boxed{f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)}$$

  Das gilt genauso für mehr Summen und Differenzen.

- Ist eine Funktion $f(x)$ selbst das Produkt einer Funktionen $g(x)$ mit einer Zahl c, dann ist die Ableitung $f'(x)$ das Produkt der Ableitungsfunktionen $g'(x)$ mit der Zahl c:

  $$\boxed{f(x) = c \cdot g(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = c \cdot g'(x)}$$

Beispiel 4.

1. $f(x) = x^3 + x$ ist die Summe aus den Funktionen x^3 und x. Damit ist $f'(x) = 3x^2 + 1$.
2. $f(x) = x^2 - x + 1$ ist die Summe/Differenz der Funktionen x^3, x und 1. Damit ist $f'(x) = 2x - 1 + 0 = 2x - 1$.
3. $f(x) = 4x^2$ ist die Funktion x^2 mit dem Faktor 4. Damit ist $f'(x) = 4 \cdot 2x = 8x$.
4. $f(x) = -8$ ist die Funktion 1 mit dem Faktor -8. Damit ist $f'(x) = -8 \cdot 0 = 0$.

3 Beispiele: Die Ableitung ganzrationaler Funktionen

Mit den Beispielen und den Rechenregeln lassen sich jetzt alle ganzrationalen Funktionen ableiten. Diese lassen sich nämlich als Summen und/oder Differenzen von Potenzfunktionen verstehen, wobei letztere noch jeweils mit einem Faktor versehen sein können.

Zur Verdeutlichung des Algorithmus beginnen wir mit drei Beispielen:

Beispiel 5.

①
$$\begin{array}{lllll}
f(x) = & 4x^3 & -8x^2 & +2x & +1 \\
f(x) = & 4\cdot x^3 & -8\cdot x^2 & +2\cdot x^1 & +1\cdot x^0 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
f'(x) = & 4\cdot 3\cdot x^{3-1} & -8\cdot 2\cdot x^{2-1} & +2\cdot 1\cdot x^{1-1} & +1\cdot 0\cdot x^{0-1} \\
f'(x) = & 12x^2 & -16x & +2 &
\end{array}$$

②
$$\begin{array}{lllll}
f(x) = & x^5 & -3x^3 & +3x^2 & -3 \\
f(x) = & 1\cdot x^5 & -3\cdot x^3 & +3\cdot x^2 & -3\cdot x^0 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
f'(x) = & 1\cdot 5\cdot x^{5-1} & -3\cdot 3\cdot x^{3-1} & +3\cdot 2\cdot x^{2-1} & -3\cdot 0\cdot x^{0-1} \\
f'(x) = & 5x^4 & -9x^2 & +6x &
\end{array}$$

③
$$\begin{array}{llll}
f(x) = & -3x^7 & -x^3 & +2x^2 \\
f(x) = & -3\cdot x^7 & -1\cdot x^3 & +2\cdot x^2 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
f'(x) = & 3\cdot 7\cdot x^{7-1} & -1\cdot 3\cdot x^{3-1} & +2\cdot 2\cdot x^{2-1} \\
f'(x) = & -21x^6 & -3x^2 & +4x
\end{array}$$

Wir fassen zusammen:

Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer ganzrationalen Funktion $f(x)$

Zu jedem Summanden von $f(x)$ erhält man den zugehörigen Summanden von $f'(x)$, indem man

- den Vorfaktor der Potenz von x mit dem Exponenten der Potenz multipliziert und
- den Exponenten der Potenz von x um Eins verringert.

4 Anwendung: Die Tangentengleichung

Wir haben die Ableitung/Steigung einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $P(x_0/f(x_0))$ erhalten, indem wir die Steigung von Geraden berechnet haben. Diese Geraden verliefen durch den Punkt P und einen weiteren Punkt $Q(a/f(a))$.

Wir sind dann mit der Stelle a immer weiter an x_0 herangerutscht und haben als Grenzwert die Ableitung/Steigung $f'(x_0)$ erhalten.

Die "Grenzgerade", die zu dieser Steigung gehört ist die Tangente.

Wie bestimmen wir nun die Geradengleichung dieser Tangente?

Dazu müssen wir uns nur zwei Dinge in Erinnerung rufen:

1. Die Tangente verläuft durch den Punkt $P(x_0/f(x_0))$
2. Die Tangente hat die Steigung $f'(x_0)$

Da also ein Punkt und die Steigung gegeben sind, können wir mit dem bekannten Verfahren eine Geradengleichung aufstellen.

Wir machen das an einigen Beispielen:

Beispiel 6. Wir wollen die Tangentengleichung der Funktion $f(x) = 0{,}25x^3 - 2x + 1$ an der Stelle $x_0 = 2$ bestimmen. Dazu berechnen wir zunächst

$$f(2) = 0{,}25 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 2 - 4 + 1 = -1$$

Der Punkt, an dem die Tangente die Funktion berührt ist also $P(2/-1)$.

Weiter brauchen wir die Steigung der Tangente, also die Steigung von $f(x)$ an er Stelle x_0. Dazu verwenden wir die Ableitung

$$f'(x) = 0{,}75x^2 - 2$$

und berechnen

$$f'(2) = 0{,}75 \cdot 2^2 - 2 = 3 - 2 = 1\,.$$

Die Tangente verläuft also durch $P(2/-1)$ und hat die Steigung $m = 1$.

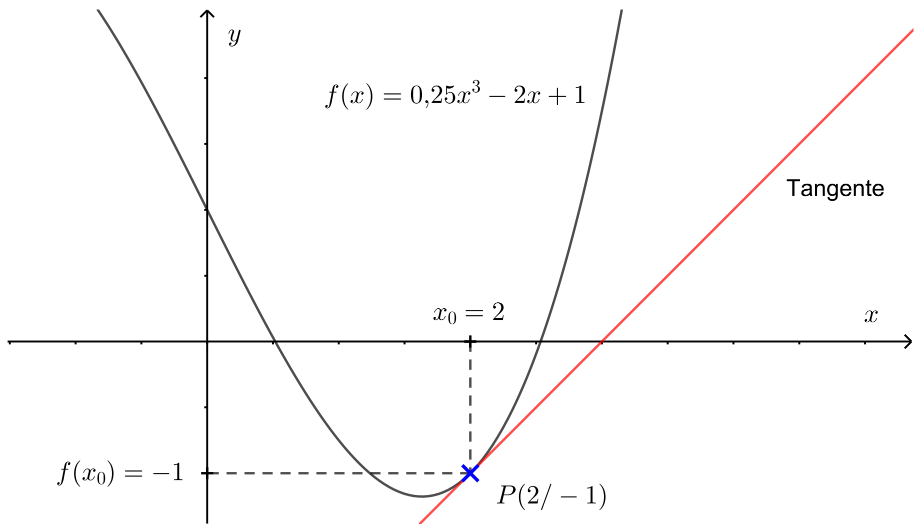
Die allgemeine Geradengleichung lautet $y = mx + b$, wobei uns $m = 1$ bereits bekannt ist, also $y = x + b$. Setzen wir hier unseren Punkt P ein, so erhalten wir

$$-1 = 2 + b \iff b = -3$$

Zusammen ergibt das die Tangentengleichung

$$y = x - 3\,.$$

Abbildung 1: Zu Beispiel 6



Beispiel 7. 1. Die Tangentengleichung von $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + 2x^3 - 4x + 8$ an der Stelle $x_0 = -2$:

$$\begin{aligned} f(-1) = &-\frac{1}{16} \cdot (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) + 8 = -1 - 16 + 8 + 8 = -1 \\ &\Longrightarrow P(-2/-1) \end{aligned}$$

Es ist $f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 6x^2 - 4$, so dass

$$\begin{aligned} f'(-2) = &-\frac{1}{4} \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 4 = 2 + 24 - 4 = 22 \\ &\Longrightarrow m = 22 \end{aligned}$$

P einsetzen in $y = 22x + b$ gibt

$$-1 = 22 \cdot (-2) + b \iff b = 43$$

Die Tangentengleichung ist damit

$$y = 22x + 43\,.$$

2. Die Tangentengleichung von $f(x) = -x^3 - 5x^2 + x + 2$ an der Stelle $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} f(1) = &-(1)^3 - 5 \cdot 1^2 + 1 + 2 = -1 - 5 + 1 + 3 = -3 \\ &\Longrightarrow P(1/-3) \end{aligned}$$

Es ist $f'(x) = -3x^2 - 10x + 1$, so dass

$$\begin{aligned} f'(1) = &-3 \cdot (1)^2 - 10 \cdot 1 + 1 = -3 - 10 + 1 = -12 \\ &\Longrightarrow m = -12 \end{aligned}$$

P einsetzen in $y = -12x + b$ gibt

$$-3 = -12 \cdot 1 + b \iff b = 9$$

Die Tangentengleichung ist damit

$$y = -12x + 9\,.$$

5 Die Begründungen für die Potenzregel, Summen- bzw. Differenzenregel und Faktorregel

5.1 Die Begründung der Potenzregel

In den Beispielen in Abschnitt 1 haben wir den Ausdruck $f(x+t)$ berechnen müssen.

Dabei ist der Ausdruck $(x+t)^n$ aufgetreten und haben diesen in der ausmultiplizierten Form benötigt.

Deshalb geben wir hier das Ergebnis an:

$$(x+t)^n = x^n + nx^{n-1}t + \binom{n}{2}x^{n-2}t^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}t^3 + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2t^{n-2} + nxt^{n-1} + t^n$$

mit

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

Damit können wir die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion bestimmen:

Wir sehen uns die allgemeine Potenzfunktion $f(x) = x^n$ an. Für diese haben wir

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(x+t)^n - x^n}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{x^n} + nx^{n-1}t + \binom{n}{2}x^{n-2}t^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2t^{n-2} + nxt^{n-1} + t^n - \cancel{x^n}}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t}\left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}t + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2t^{n-3} + nxt^{n-2} + t^{n-1}\right)}{\cancel{t}} \\
&= \lim_{t \to 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}t + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2t^{n-3} + nxt^{n-2} + t^{n-1}\right) \\
&= nx^{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Für die allgemeine Potenzfunktion haben wir also tatsächlich

$$f(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

5.2 Die Begründung der Summen- bzw. Differenzregel

Zur Berechnung der Summen- bzw. Differenzenregel sehen wir uns einfach den Differenzenquotienten für die Funktion $f(x) = g(x) + h(x)$ an:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+t) - f(x)}{t} &= \frac{\big(g(x+t) + h(x+t)\big) - \big(g(x) + h(x)\big)}{t} \\
&= \frac{g(x+t) - h(x+t) - g(x) - h(x)}{t} \\
&= \frac{g(x+t) - g(x) + h(x+t) - h(x)}{t} \\
&= \frac{\big(g(x+t) - g(x)\big) + \big(h(x+t) - h(x)\big)}{t} \\
&= \frac{g(x+t) - g(x)}{t} + \frac{h(x+t) - h(x)}{t}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{g(x+t) - g(x)}{t}}_{= g'(x)} + \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{h(x+t) - h(x)}{t}}_{= h'(x)} = g'(x) + h'(x)\,.$$

Für die Differenz $f(x) = g(x) - h(x)$ klappt das genauso:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+t) - f(x)}{t} &= \frac{\big(g(x+t) - h(x+t)\big) - \big(g(x) - h(x)\big)}{t} \\
&= \frac{g(x+t) + h(x+t) - g(x) + h(x)}{t} \\
&= \frac{g(x+t) - g(x) - h(x+t) + h(x)}{t} \\
&= \frac{\big(g(x+t) - g(x)\big) - \big(h(x+t) - h(x)\big)}{t} \\
&= \frac{g(x+t) - g(x)}{t} - \frac{h(x+t) - h(x)}{t}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{g(x+t) - g(x)}{t}}_{= g'(x)} - \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{h(x+t) - h(x)}{t}}_{= h'(x)} = g'(x) - h'(x)\,.$$

5.3 Die Begründung der Faktorregel

Auch zur Berechnung der Faktorregel sehen wir uns den Differenzenquotienten an, dieses mal für die Funktion $f(x) = c \cdot g(x)$ an:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+t) - f(x)}{t} &= \frac{c \cdot g(x+t) - c \cdot g(x)}{t} \\
&= \frac{c \cdot \big(g(x+t) - g(x)\big)}{t} \\
&= c \cdot \frac{g(x+t) - g(x)}{t}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = c \cdot \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{g(x+t) - g(x)}{t}}_{g'(x)} = c \cdot g'(x)\,.$$