Frank Klinker

Differentialrechnung

Teil 4: Qualitative Aspekte der Ableitung, Extrema und Sattelpunkte

1 Die Ableitung zur qualitativen Beschreibung der Steigung einer Funktion

1.1 Wiederholung: Die Ableitung einer Funktion

Wir haben die Ableitung einer Funktion in einem Punkt $\big(x_0/f(x_0)\big)$ als Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion kennengelernt. Diese haben wir mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

> Der Wert $f'(x_0)$ der Ableitungsfunktion an der Stelle x_0 ist das Maß für die Steigung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0.

Wie man im Fall einer ganzrationalen Funktion $f(x)$ die Ableitungsfunktion $f'(x)$ erhält, wissen wir ebenfalls bereits:

> Zu jedem Summanden einer ganzrationalen Funktion $f(x)$ erhält man den zugehörigen Summanden von $f'(x)$, indem man
>
> - den Vorfaktor der Potenz von x mit dem Exponenten der Potenz multipliziert und
> - den Exponenten der Potenz von x um Eins verringert.

Beispiel 1.

- $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 2x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 12x^2 - 16x + 2$
- $f(x) = x^5 - 3x^3 + 3x^2 - 3 \Longrightarrow f'(x) = 5x^4 - 9x^2 + 6x$
- $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 9x + 4 \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 + 8x + 9$
- $f(x) = -3x^7 - x^3 + 2x^2 \Longrightarrow f'(x) = -21x^6 - 3x^2 + 4x$

1.2 Qualitative Aspekte der Ableitung

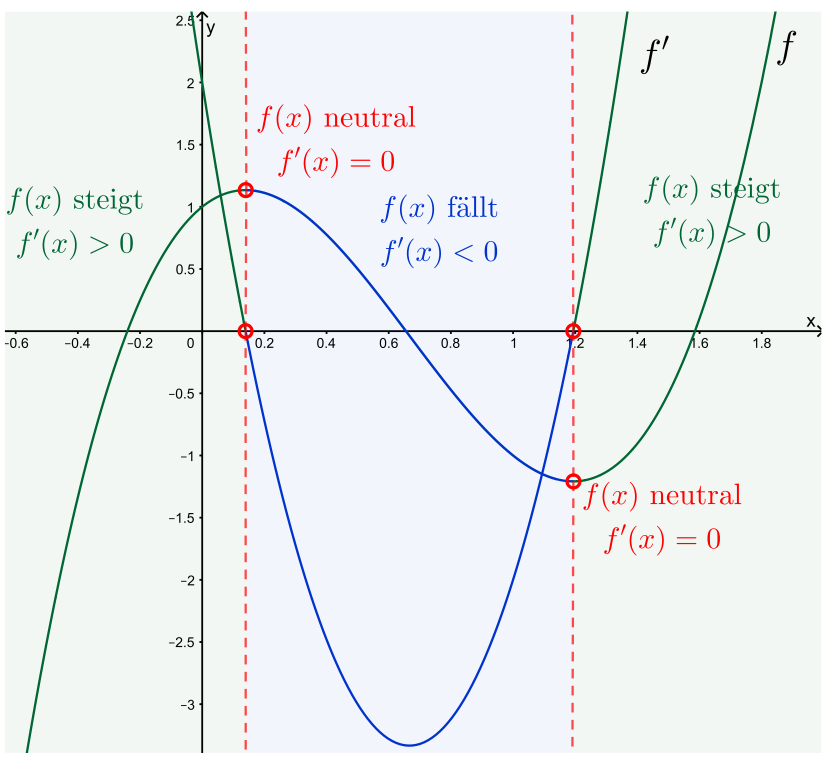
Im folgenden wollen wir uns jedoch spezielle qualitative Eigenschaften der Ableitungsfunktion ansehen. Zunächst halten wir fest:

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

> Ob der Graph von $f(x)$ steigt oder fällt, ist durch das Vorzeichen von $f'(x)$ bestimmt:
>
> - $f'(x)$ ist positiv an den Stellen, wo $f(x)$ steigt
> - $f'(x)$ ist negativ an den Stellen, wo $f(x)$ fällt
> - $f'(x)$ hat Nullstellen an den Stellen, wo die Steigung von $f(x)$ neutral ist
>
> Und weiter:
>
> - Je stärker eine Funktion steigt, desto größer ist der positive Wert der Ableitungsfunktion.
> - Je stärker eine Funktion fällt, desto kleiner ist der negative Wert der Ableitungsfunktion.

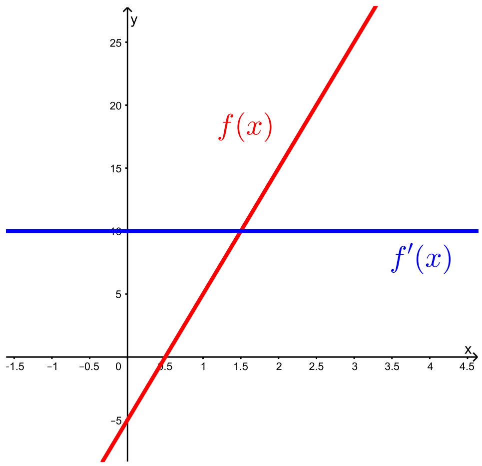
Beispiel 2. In Abb. 1 sieht man den Zusammenhang zwischen der Steigung der Funktion und dem Vorzeichen der Ableitung am Beispiel $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 2x + 1$ und $f'(x) = 12x^2 - 16x + 2$.

Abbildung 1: $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 2x + 1$ und $f'(x) = 12x^2 - 16x + 2$ aus Beispiel 2

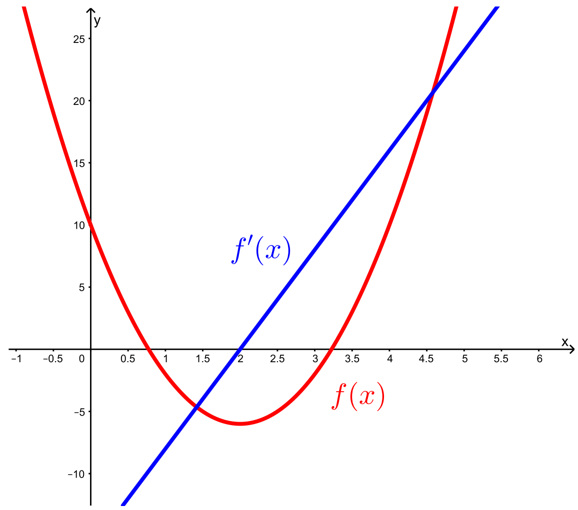


Weitere Paare aus Funktion und Ableitung sind im folgenden Abschnitt 2 skizziert.

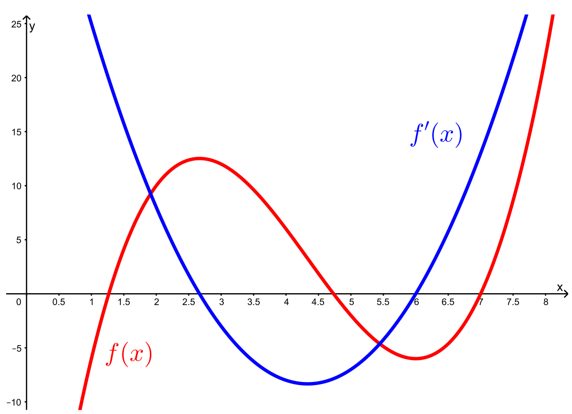
2 Weitere Beispiele zum Vergleich $f(x)$ und $f'(x)$



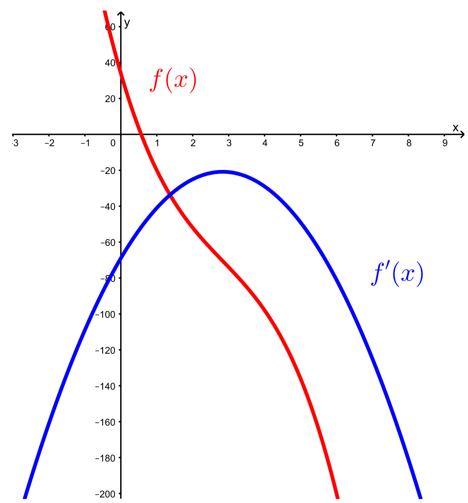
$$f(x) = 10x - 5$$
$$f'(x) = 10$$



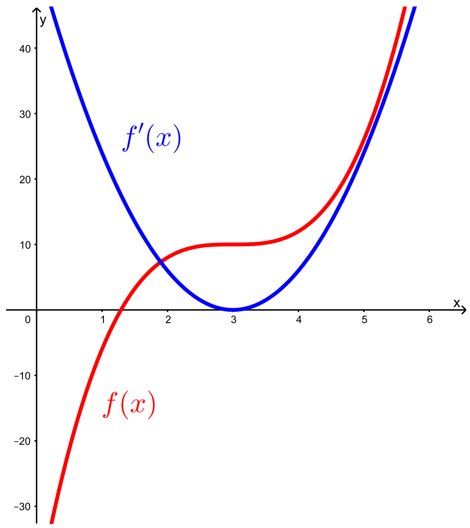
$$f(x) = 4x^2 + 16x + 10$$
$$f'(x) = 8x - 16$$



$$f(x) = x^3 - 13x^2 + 48x - 42$$
$$f'(x) = 3x^2 - 26x + 48$$

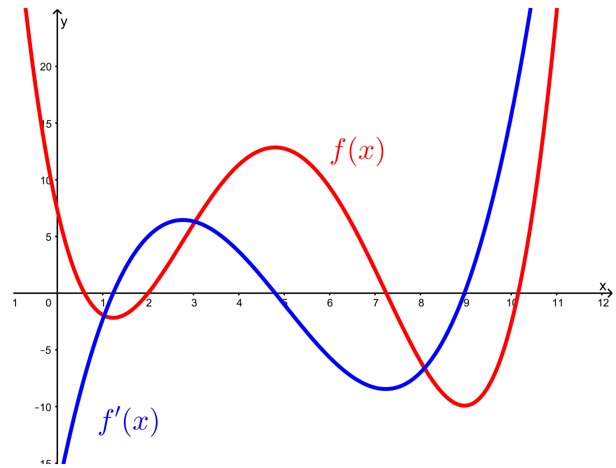


$$f(x) = -2x^3 + 17x^2 - 69x + 34$$
$$f'(x) = -6x^2 + 34x - 69$$



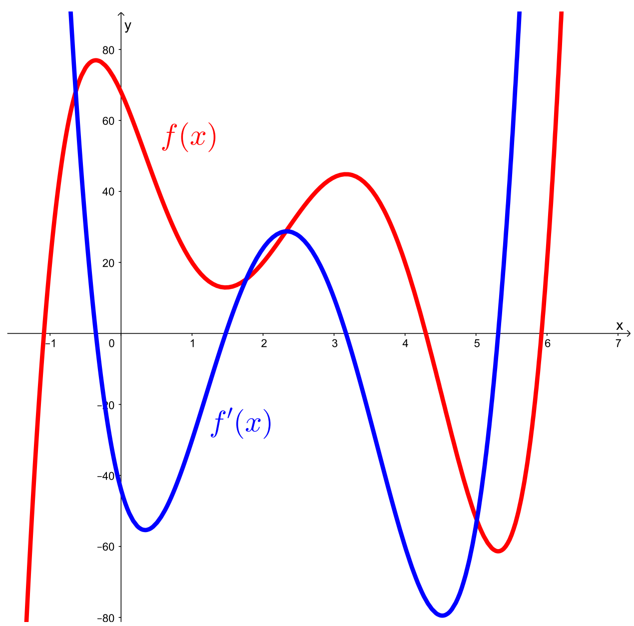
$$f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 54x - 44$$

$$f'(x) = 6x^2 - 36x + 54$$



$$f(x) = \tfrac{1}{12}x^4 - \tfrac{5}{3}x^3 + 10x^2 - 17\tfrac{2}{3}x + 7\tfrac{1}{3}$$

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 20x - 17\tfrac{2}{3}$$



$$f(x) = x^5 - 12x^4 + 43x^3 - 36x^2 - 44x + 68$$

$$f'(x) = 5x^4 - 48x^3 + 129x^2 - 72x - 44$$