Frank Klinker

Anwendungen zur Kraftzerlegung und Kraftaddition

Teil 1: Die schiefe Ebene

1 Die schiefe Ebene

1.1 Die schiefe Ebene ohne Reibung

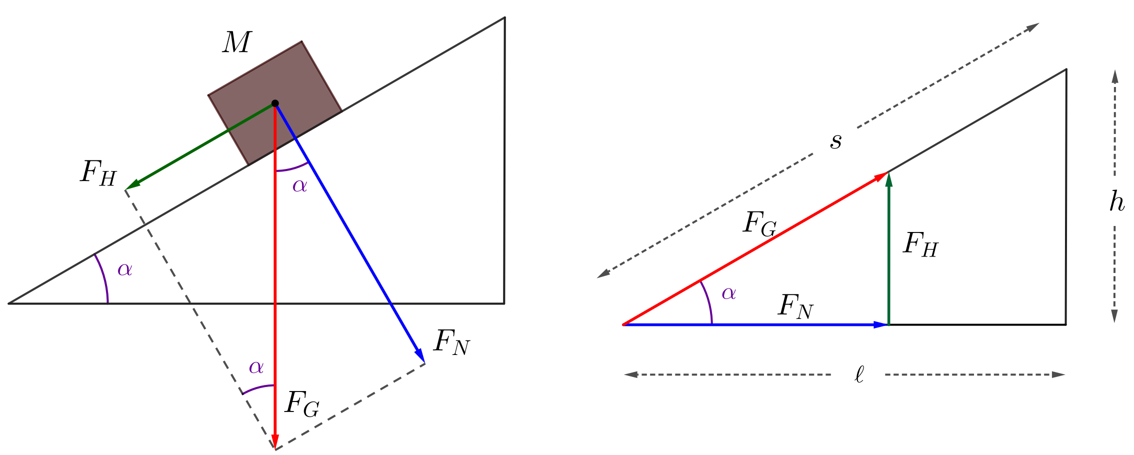
Eine erste Anwendung der Kraftzerlegung ist die **schiefe Ebene**. Darunter versteht man eine Ebene, die gegen die Horizontale um einen festen Winkel α gekippt ist.

Wir sehen uns einen Probekörper an, der sich auf einer solchen schiefen Ebene frei, d. h. reibungsfrei, bewegt. Wir bemerken, dass der Körper sich abwärts bewegt und dabei immer schneller wird. Er wird also entlang der Ebene beschleunigt. Das zweite Newtonsche Gesetz sagt nun, dass für diese Beschleunigung eine Kraft verantwortlich ist. Aber welche?

Die einzige Kraft, die auf den Körper ein wirkt, ist die Gravitationskraft, die jedoch senkrecht nach unten zeigt.

Die Lösung dieses scheinbaren Problems liefert die Abb. 1(links). Hier wird die Gravitationskraft F_G in zwei Komponenten zerlegt. Die eine Komponente F_H verläuft parallel zur schiefen Ebene und heißt **Hangabtriebskraft**, die zweite Komponente F_N verläuft senkrecht zur schiefen Ebene und heißt **Normalkraft**.

Abb. 1: Die Käfte an der reibungsfreien schiefen Ebene



Die Hangabtriebskraft ist für die Beschleunigung a_H der Masse entlang der Ebene verantwortlich:

$$a_H = \frac{F_H}{m} \,.$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

Beziehungen zwischen F_G, F_H und F_N

- Da das Kräfteparallelogramm rechtwinklig ist, gilt der Satz von Pythagoras:

$$\boxed{F_G^2 = F_H^2 + F_N^2}$$

- Mit Hilfe von Abb. 1(rechts) liefert uns der Strahlensatz die folgenden Beziehungen zwischen der Geometrie der schiefen Ebene und der beteiligten Kräfte:

  Kennt man die Strecke s der schiefen Ebene und die dabei zurückgelegte Höhe h, dann gilt

$$\frac{F_H}{F_G} = \frac{h}{s} \quad \text{oder} \quad \boxed{F_H = \frac{h}{s} \cdot F_G}.$$

  Ist dazu noch $\ell = \sqrt{s^2 - h^2}$ die horizontale Länge der schiefen Ebene, dann ist

$$\frac{F_N}{F_G} = \frac{\ell}{s} \quad \text{oder} \quad \boxed{F_N = \frac{\ell}{s} \cdot F_G}$$

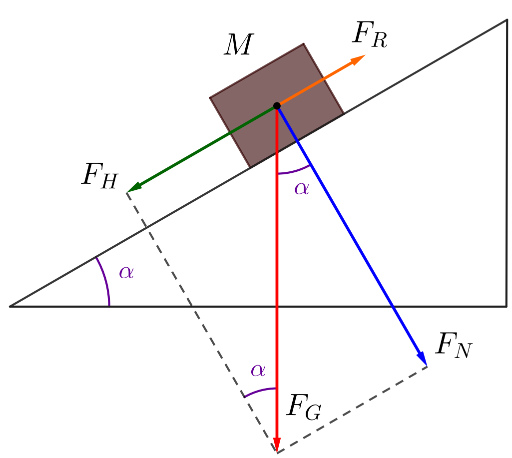
- Mit Hilfe trigonometrischer Ausdrücke kann man das in Termen des beteiligten Steigungswinkels α ausdrücken

$$\frac{F_H}{F_G} = \sin(\alpha) \quad \text{oder} \quad \boxed{F_H = F_G \cdot \sin(\alpha)}$$
$$\frac{F_N}{F_G} = \cos(\alpha) \quad \text{oder} \quad \boxed{F_N = F_G \cdot \cos(\alpha)}$$

1.2 Die schiefe Ebene mit Reibung

Als nächstes sehen wir uns die Bewegung mit zusätzlicher Reibung an. Die Reibung macht sich durch eine zusätzliche Kraft entgegen der Bewegungsrichtung bemerkbar, siehe Abb. 2.

Abb. 2: Die Käfte an der schiefen Ebene mit Reibung



Die Reibungskraft ist proportional zur Kraft F_N, die die Masse auf die Unterlage zwingt, also $F_R = \mu F_N$. Hier ist μ der Reibungskoeffizient der Materialpaarung Ebene/Körper.

Durch die Reibung wird die Beschleunigung verlangsamt.[1] In Abhängigkeit vom Neigungswinkel bzw. den geometrischen Abmessungen der Ebene erhalten wir mit $F_G = mg$

$$\begin{aligned} F_H &= mg\sin(\alpha) \\ F_R &= \mu mg\cos(\alpha) \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} F_H &= mg \cdot \frac{h}{s}\,, \\ F_R &= \mu mg \cdot \frac{\ell}{s}\,. \end{aligned}$$

Wegen $F_H - F_R = mg\sin(\alpha) - \mu mg\cos(\alpha) = mg\big(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)\big)$ ergibt sich die reduzierte Beschleunigung $a_H = \dfrac{F_H - F_R}{m}$ zu

$$\boxed{a_H = g\big(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)\big)} \qquad \text{oder} \qquad \boxed{a_H = g \cdot \frac{h - \mu\ell}{s}}\,.$$

Mit μ ist jetzt der Haftreibungskoeffizient der Materialpaarung gemeint. Es gibt einen Grenzwinkel α_g für den der Körper sich zu bewegen beginnt. Dieser berechnet sich aus der Bedingung $a_H = 0$ also $\sin(\alpha_g) - \mu\cos(\alpha_g) = 0$ zu $\mu = \dfrac{\sin(\alpha_g)}{\cos(\alpha_g)} = \tan(\alpha_g)$, d. h.

$$\boxed{\alpha_g = \arctan(\mu)}\,.$$

[1] Das ist nur sinnvoll für $F_H \geq F_R$.