Frank Klinker

Was sind Brüche und wie rechnet man mit ihnen?

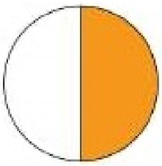
Teil 1: Darstellung, Erweitern, Kürzen

1 Was sind Brüche?

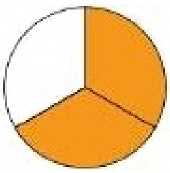
Aus dem Alltag wissen wir, dass die ganzen Zahlen zum Rechnen nicht ausreichen. Im Mathematikunterricht in der Schule haben wir das dann in der sechsten Klasse gemerkt. Dort haben wir deshalb die Brüche kennen gelernt.

Zunächst wurden sie als Schreibweise für bestimmt 'Anteile' verwendet, z. B.

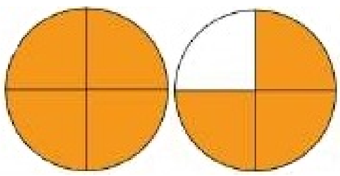
- $\frac{1}{2}$ ist der Anteil, wenn man ein Ganzes in 2 gleiche Teile teilt:



- $\frac{2}{3}$ ist der Anteil, wenn man ein Ganzes in 3 gleiche Teile teilt und davon dann 2 Teile nimmt;



- $\frac{7}{4}$ ist der Anteil, wenn man zwei Ganzes in jeweils 4 gleiche Teile teilt und dann davon insgesamt 7 Teile nimmt:



Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 30. August 2023

Ein **Bruch** besteht aus zwei ganzen Zahlen, die übereinander geschrieben und durch einen **Bruchstrich** getrennt werden.

Die obere Zahl heißt **Zähler** und die untere Zahl heißt **Nenner**.

Zähler

$$\text{Bruch}\left\{\frac{57}{113}\right. \longleftarrow \text{Bruchstrich}$$

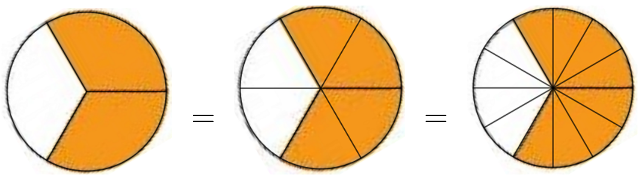
Nenner

Alle Brüche zusammen nennt man die **Menge der rationalen Zahlen** und bezeichnet sie auch mit $\mathbb{Q}$.

2 Unterschiedliche Brüche aber doch gleich?

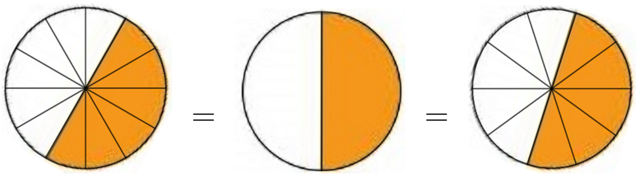
2.1 Erste Beispiele gleicher Brüche

Wenn wir uns Bilder genauer ansehen, dann bemerken wir, dass es verschiedene Brüche geben kann, die die gleiche Aufteilung geben. Z. B.



$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$$

oder



$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$$

Wenn zwei Brüche den gleichen Anteil beschreiben, dann sagen wir: Die Brüche sind **gleich**.

Wir wollen nun untersuchen, wie man Brüchen ansehen kann, ob sie gleich sind. Wir machen das an den beiden obigen Beispielen:

$$\begin{tikzcd} \frac{2}{3} \arrow[r, bend left, "\cdot 4"] \arrow[r, bend right, "\cdot 4"'] \arrow[rr, bend left=60, "\cdot 2"] \arrow[rr, bend right=60, "\cdot 2"'] & \frac{8}{12} \arrow[r, bend left, ":2"] \arrow[r, bend right, ":2"'] & \frac{4}{6} \arrow[r, bend left, ":2"] \arrow[r, bend right, ":2"'] & \frac{2}{3} \end{tikzcd}$$

Man sieht, dass man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert oder durch die gleiche Zahl dividiert hat.

Auch im zweiten Beispiel sieht man das:

$$\begin{tikzcd} \frac{6}{12} \arrow[r, bend left, ":6"] \arrow[r, bend right, ":6"'] \arrow[rr, bend left=60, "\boxed{?}"] \arrow[rr, bend right=60, "\boxed{?}"'] & \frac{1}{2} \arrow[r, bend left, "\cdot 5"] \arrow[r, bend right, "\cdot 5"'] & \frac{5}{10} \end{tikzcd}$$

Achtung! In diesem zweiten Beispiel sieht man bereits, dass man nicht immer direkt einen benötigten Faktor findet. Dann ist ein Umweg mit mehreren Faktoren nötig!

2.2 Erweitern und Kürzen

Wir fassen das Resultat der Beispiele zusammen:

Erweitern:	Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen ganzen Zahl multipliziert
Kürzen:	Man kürzt einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch die gleiche ganzen Zahl dividiert

Bemerkung 1.
1. Zwei Brüche sind gleich, wenn sie durch kürzen und erweitern ineinander übergehen.
2. Man kann einen Bruch immer erweitern. **Aber:** man kann einen Bruch immer nur so lange kürzen, wie man Zähler und Nenner durch eine gemeinsame Zahl teilen kann.
3. Kann man einen Bruch nicht kürzen, dann nennt man ihn **vollständig gekürzt**.

Beispiel 2.

$$\frac{21}{9} = \frac{21:3}{9:3} = \frac{7}{3} \qquad \text{(Kürzen mit 3)}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 142857}{7 \cdot 142857} = \frac{714285}{999999} \qquad \text{(Erweitern mit 142857)}$$

$$\frac{1050}{1575} = \frac{1050:5}{1575:5} = \frac{210}{315} = \frac{210:5}{315:5} = \frac{42}{63} = \frac{42:7}{63:7} = \frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$

(Kürzen mit 5, 5, 7 und 3)

$$\frac{60}{165} = \frac{60:5}{165:5} = \frac{12}{33} = \frac{12 \cdot 3}{33 \cdot 3} = \frac{36}{99} \qquad \text{(Kürzen mit 5, Erweitern mit 3)}$$

$$\frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} \qquad \text{(Kürzen mit 3, Erweitern mit 25)}$$

Für das Kürzen schreiben wir auch kürzer:

$$\frac{1050}{1575} = \frac{\cancel{1050}^{210}}{\cancel{1575}_{315}} = \frac{\cancel{210}^{42}}{\cancel{315}_{63}} = \frac{\cancel{42}^{6}}{\cancel{63}_{9}} = \frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{2}{3}$$

Der Nachteil dieser Notation ist, dass man nicht sieht, mit welcher Zahl gekürzt wurde.