Frank Klinker

Was sind Brüche und wie rechnet man mit ihnen?

Teil 2: Rechnen mit Brüchen

1 Wie rechnet man mit Brüchen?

Wir werden hier kennenlernen, wie wir mit Brüchen rechnen können. Dass die Regeln korrekt sind, kann man mit Hilfe der Rechenregeln für ganze Zahlen begründen (Das machen wir später).

1.1 Addieren und Subtrahieren

Das Addieren und Subtrahieren von Brüchen klappt ganz einfach, wenn beide den gleichen Nenner haben:

Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Brüche mit gleichen Nennern:

Man addiert oder subtrahiert Brüche mit gleichen Nennern, indem man lediglich die Zähler addiert oder subtrahiert, z. B.

$$\frac{8}{13}+\frac{25}{13}=\frac{8+25}{13}=\frac{33}{13}$$
$$\frac{12}{3}-\frac{2}{3}=\frac{12-2}{3}=\frac{10}{3}$$

Brüche mit verschiedenen Nennern:

Haben die beiden beteiligten Brüche unterschiedliche Nenner, dann muss man sie zunächst so weit erweitern oder kürzen, bis sie gleiche Nenner haben. Dann kann man addieren oder subtrahieren, z. B.

$$\frac{8}{100}+\frac{13}{50}=\frac{8:2}{100:2}+\frac{13}{50}=\frac{4}{50}+\frac{13}{50}=\frac{4+13}{50}=\frac{17}{50}$$
$$\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}-\frac{1}{8}=\frac{6}{8}-\frac{1}{8}=\frac{6-1}{8}=\frac{5}{8}$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 30. August 2023

Beispiel 1.

$$\frac{4}{15}+\frac{16}{105}=\frac{4\cdot 7}{15\cdot 7}+\frac{16}{105}=\frac{28}{105}+\frac{16}{105}=\frac{44}{105}$$

$$\frac{3}{6}-\frac{2}{8}=\frac{3\cdot 4}{6\cdot 4}-\frac{2\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{12}{24}-\frac{6}{24}=\frac{12-6}{24}=\frac{\cancel{6}^{\,1}}{\cancel{24}_{\,4}}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{15}{7}+5=\frac{15}{7}+\frac{5}{1}=\frac{15}{7}+\frac{5\cdot 7}{1\cdot 7}=\frac{15}{7}+\frac{35}{7}=\frac{15+35}{7}=\frac{50}{7}$$

$$\frac{17}{5}-\frac{3}{2}=\frac{17\cdot 2}{5\cdot 2}-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}=\frac{34}{10}-\frac{15}{10}=\frac{34-15}{10}=\frac{29}{10}$$

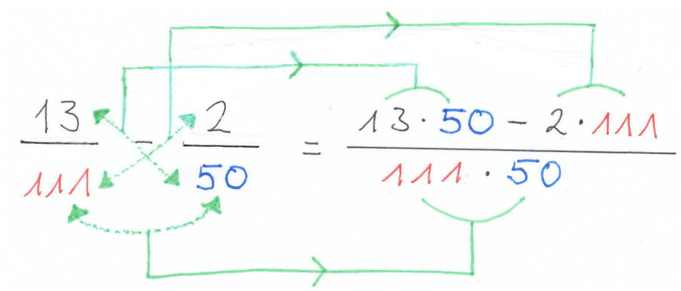
Bemerkung 2. Es scheint nicht so einfach zu sein, den passenden Nenner zu finden. Das ist aber nicht so, denn es ist zunächst mal egal ob man "den besten" Nenner findet oder irgendeinen:

> Einen passenden Nenner erhält man immer aus dem Produkt der beiden Nenner der beteiligten Brüche!

Im letzten Beispiel haben wir das bereits gemacht. Wir testen das an einem weiteren Beispiel:

$$\frac{7}{12}+\frac{4}{3}=\frac{7\cdot 3}{12\cdot 3}+\frac{4\cdot 12}{3\cdot 12}=\frac{7\cdot 3+4\cdot 12}{12\cdot 3}$$

Die folgende Grafik skizziert das Verfahren noch einmal:



Insgesamt gibt das

$$\frac{13}{111}-\frac{2}{50}=\frac{13\cdot 50-2\cdot 111}{111\cdot 50}=\frac{\cancel{428}^{\,214}}{\cancel{5550}_{\,2775}}=\frac{412}{2775}\,.$$

1.2 Multiplizieren und Dividieren

Multiplizieren von Brüchen

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man jeweils die beiden Zähler und die beiden Nenner miteinander multipliziert. Das gibt dann Zähler und Nenner des Ergebnisses. Z. B.

$$\frac{12}{39}\cdot\frac{7}{2}=\frac{12\cdot 7}{39\cdot 2}=\frac{84}{78}$$

Bemerkung 3. Multiplizieren wir eine ganze Zahl mit einem Bruch, so muss man nur den Zähler mit der ganzen Zahl multiplizieren. Das sieht man am besten, wenn man die ganze Zahl zu einem Bruch macht, z. B.

$$\boxed{12 \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{1} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12 \cdot 3}{1 \cdot 8} = \frac{12 \cdot 3}{8}}$$

Beispiel 4.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{23}{100} = \frac{2 \cdot 23}{5 \cdot 100} = \frac{\cancel{46}^{23}}{\cancel{500}_{250}} = \frac{23}{250}$$

$$4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{4 \cdot 3}{8} = \frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{8}_{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{7}{52} \cdot 8 = \frac{7 \cdot 8}{52} = \frac{\cancel{56}^{14}}{\cancel{52}_{13}} = \frac{14}{13}$$

$$\frac{8}{3} \cdot 92 = \frac{8 \cdot 9}{3 \cdot 2} = \frac{\cancel{72}^{12}}{\cancel{6}_{1}} = \frac{12}{1} = 12$$

Dividieren von Brüchen

Zwei Brüche werden miteinander dividiert, indem man den hinteren der beiden Brüche umdreht und die beiden Brüche danach multipliziert. Z. B.

$$\frac{11}{3} : \frac{5}{2} = \frac{11}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{11 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{22}{10}$$

Beispiel 5.

$$\frac{4}{15} : \frac{16}{105} = \frac{4 \cdot 105}{15 \cdot 16} = \frac{\cancel{420}^{7}}{\cancel{240}_{4}} = \frac{7}{4}$$

$$4 : \frac{3}{2} = \frac{4}{1} : \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{15}{7} : 5 = \frac{15}{7} : \frac{5}{1} = \frac{15 \cdot 1}{7 \cdot 5} = \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{35}_{7}} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{115}{32} : \frac{50}{8} = \frac{115 \cdot 8}{32 \cdot 50} = \frac{\cancel{920}^{23}}{\cancel{1600}_{40}} = \frac{23}{40}$$

Bemerkung 6. Oft bietet es sich an, nicht sofort Nenner und Zähler auszurechnen, sondern man kann **über Kreuz kürzen**, z. B.

$$\frac{115}{32} : \frac{50}{8} = \frac{115 \cdot \cancel{8}^{1}}{\cancel{32}_{4} \cdot 50} = \frac{\cancel{115}^{23} \cdot 1}{4 \cdot \cancel{50}_{10}} = \frac{23}{4 \cdot 10} = \frac{23}{40}$$

! **Achtung:** Das Überkreuz-Kürzen ist nur erlaubt, wenn im Zähler und Nenner <u>nur</u> multipliziert wird. Es darf <u>keine</u> Strichrechnung vorkommen.

1.3 Vergleichen von Brüchen

Sehr einfach ist das Vergleichen zwei Brüche, wenn die Nenner gleich sind. In diesem Fall erinnern wir uns daran, dass z B.

$$\frac{4}{17} = 4 \cdot \frac{1}{17} \quad \text{und} \quad \frac{6}{17} = 6 \cdot \frac{1}{17}\,.$$

Wenn wir also Brüche mit gleichen Nennern sortieren wollen, brauchen wir uns nur die Zähler anzuschauen:

$$\frac{4}{17} < \frac{6}{17} \quad \text{weil} \quad 4 < 6\,.$$

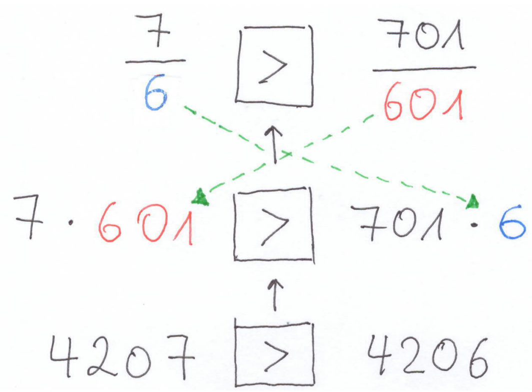
Sind die Nenner nicht gleich, dann müssen wir die beiden Brüche zuerst auf den gleichen Nenner bringen. Das haben wir bereits bei der Addition und der Subtraktion auf eine Art gemacht, die immer klappt. Wir führen das auch hier an einem Beispiel durch:

$$\frac{4}{5} \,\square\, \frac{41}{51} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{4 \cdot {\color{red}51}}{5 \cdot {\color{red}51}} \,\square\, \frac{41 \cdot {\color{blue}5}}{51 \cdot {\color{blue}5}} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{204}{255} \,\square\, \frac{205}{255}$$

Damit ist

$$\frac{4}{5} < \frac{41}{51} \qquad \text{weil} \qquad \frac{204}{255} < \frac{205}{255}$$

Weil wir hierbei die Nenner eigentlich gar nicht benötigen, kann man das Verfahren wie folgt zusammenfassen



2 Die Begründung der Rechenregeln für Brüche mit Hilfe der Rechenregeln für ganze Zahlen

Die Möglichkeit einen Bruch $\frac{a}{b}$ mit der Kommazahl $a : b$ zu identifizieren macht den Weg frei die Rechenregeln für Multiplikation, Division, Addition und Multiplikation zu begründen.

Die Begründung für die Multiplikation:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a : b) \cdot (c : d)$$

$$
\begin{aligned}
&= a : b \cdot c : d \\
&= a \cdot c : b : d \\
&= a \cdot c : (b \cdot d) \\
&= (a \cdot c) : (b \cdot d) \\
&= \frac{a \cdot c}{b \cdot d}
\end{aligned}
$$

Die Begründung für die Division:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= (a : b) : (c : d) \\
&= a : b : c \cdot d \\
&= a \cdot d : b : c \\
&= a \cdot d : (b \cdot c) \\
&= (a \cdot d) : (b \cdot c) \\
&= \frac{a \cdot d}{b \cdot c}
\end{aligned}
$$

Die Begründung für die Addition und Subtraktion mit gleichen Nennern:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} &= (a : b) \pm (c : b) \\
&= a : b \pm c : b \\
&= (a \pm c) : b \\
&= \frac{a \pm c}{b}
\end{aligned}
$$

Die Begründung für die Addition und Subtraktion mit unterschiedlichen Nennern:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= (a : b) \pm (c : d) \\
&= a \cdot d : b : d \pm c \cdot b : d : b \\
&= (a \cdot d) : (b \cdot d) \pm (c \cdot b) : (d \cdot b) \\
&= \big((a \cdot d) \pm (c \cdot b)\big) : (b \cdot d) \\
&= \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}
\end{aligned}
$$