

Was sind Brüche und wie rechnet man mit ihnen?

Teil 3: Brüche und Kommazahlen

1 Wieso ist ein Bruch eine "Zahl"?

1.1 Brüche als Kommazahlen

Wir können ganze Zahlen der Größe nach sortieren, z. B.

$$-292 < -7 < 3 < 8 < 1001 .$$

Haben wir eine Kommazahl, können wir diese auch mit in den Vergleich einfügen, z. B.

$$-2 < -0,7 < 0 < 0,56 < 1 < 3,14 < 10 < 100,3 .$$

Um jetzt Brüche mit anderen Brüchen und mit ganzen Zahlen vergleichen zu können machen wir es uns wieder sehr einfach:

Um den "Zahlwert" eines Bruchs zu ermitteln, berechnen wir die Kommazahl, die wir als Ergebnis der Rechnung **Zähler : Nenner** erhalten.

Beispiel 1.

$$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5$$

$$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0,375$$

$$\frac{10}{4} = 10 : 4 = 2,5$$

$$\frac{12}{24} = 12 : 24 = 0,5$$

$$\frac{61}{100} = 61 : 100 = 0,61$$

$$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0,666\dots = 0,\bar{6}$$

$$\frac{14}{99} = 14 : 99 = 0,141414\dots = 0,\overline{14}$$

$$\frac{31}{99} = 31 : 99 = 1,323232\dots = 1,\overline{32}$$

$$\frac{51}{198} = 0,2575757\dots = 0,2\overline{57}$$

$$\frac{114}{171} = 114 : 171 = 0,666\dots = 0,\bar{6}$$

$$\frac{3}{7} = 3 : 7 = 0,428571428571428571\dots = 0,\overline{428571}$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm

E-Mail: mail@frank-klinker.de

Version: 30. August 2023

Bemerkung 2. 1. Es fällt auf, dass die Kommazahl, die wir nach dem "Ausrechnen" des Bruchs erhalten haben, entweder abbricht oder periodisch ist.

Das ist tatsächlich immer so!¹

2. Wir sehen im obigen Beispiel, dass verschiedene Brüche nach dem Ausrechnen die gleiche Kommazahl ergeben können. Dieses Phänomen wundert uns aber nicht, wenn wir an die Möglichkeit des Erweiterns oder Kürzens denken.

3. Es scheint auch sehr umständlich zu sein, dass man Brüche zuerst in eine Kommazahl verwandeln muss, um sie "als Zahlen behandeln zu können".

Wir bereits gesehen haben, ist dieses Umwandeln aber ja auch gar nicht nötig: Wir können Brüche sehr einfach miteinander und mit ganzen Zahlen vergleichen. Außerdem können wir mit Hilfe einfacher Regeln mit ihnen rechnen ohne erst die Kommazahl zu bestimmen.

Aufgaben. a) Geben Sie ein Verfahren an, wie Sie eine Kommazahl erhalten, die nicht abbricht aber auch nicht periodisch ist.

b) Die Zahlen aus a) nennt man **irrationale Zahlen**. Recherchieren Sie Beispiele irrationaler Zahlen.

1.2 Kommazahlen als Brüche

So wie wir Brüche in Kommazahlen umwandeln können, können wir das auch umgekehrt machen. Dazu gehen wir in zwei Schritten vor und beginnen mit den abbrechenden Kommazahlen:

Zähler und Nenner des Bruchs zu einer abbrechenden Kommazahl erhält man wie folgt:

▷ Den Zähler erhält man, indem man in der Kommazahl das Komma weglässt

▷ Der Nenner ist eine Zehnerpotenz mit so vielen Nullen, wie die Anzahl der Nachkommastellen der Kommazahl ist

Beispiel 3.

$$\begin{array}{lll} 0,5 = \frac{5}{10} & 0,375 = \frac{375}{1000} & 2,05 = \frac{205}{100} \\ 14,78 = \frac{1478}{100} & 1,000009 = \frac{1000009}{1000000} & 4 = \frac{4}{1} \\ 235,701 = \frac{235701}{1000} & 0,0008 = \frac{8}{10000} & 1,00 = \frac{100}{100} \end{array}$$

Bei den periodischen Kommazahlen sieht das schon etwas komplizierter aus. Wir werden aber sehen, dass es da einfache Spezialfälle gibt.

¹Die Begründung dafür ist nicht einfach und benötigt weitere mathematische Hilfsmittel.

Zähler und Nenner des Bruchs zu einer periodischen Kommazahl erhält man wie folgt:

- ▷ Der Zähler ist die Differenz aus zwei Zahlen:
 - Die erste Zahl erhält man, indem man in der Kommazahl das Komma und den "Periodenstrich" weglässt
 - die zweite Zahl erhält man aus der ersten, indem man zusätzlich die Ziffern der Periode weglässt
- ▷ Der Nenner ist das Produkt aus zwei Zahlen:
 - Eine Zahl mit so vielen Neunen, wie die Länge der Periode,
 - Eine Zehnerpotenz mit so vielen Nullen, wie die Anzahl der nicht-periodischen Nachkommastellen

Beispiel 4. Wir bestimmen den Bruch einer periodischen Kommazahl mit dem Verfahren von oben:

$$\begin{aligned}
 4,78\overline{261} &= \frac{478261 - 478}{99900} = \frac{477783}{99900} & 0,3\overline{84} &= \frac{384 - 3}{990} = \frac{381}{990} \\
 12,3889\overline{4} &= \frac{1238894 - 123889}{90000} = \frac{1115005}{90000} & 2,2\overline{1} &= \frac{221 - 22}{90} = \frac{199}{90}
 \end{aligned}$$

Beispiel 5. Einfacher ist es, wenn der Bruch rein-periodisch ist, d. h. es kommen keine nicht-periodischen Nachkommastellen vor:

$$\begin{aligned}
 4,\overline{161} &= \frac{4161 - 4}{999} = \frac{4157}{999} & 3,\overline{14} &= \frac{314 - 3}{99} = \frac{311}{99} \\
 12,\overline{34} &= \frac{1234 - 12}{99} = \frac{1222}{99} & 2,\overline{3} &= \frac{23 - 2}{9} = \frac{21}{9}
 \end{aligned}$$

Beispiel 6. Ganz besonders einfach ist das, wenn der Bruch rein-periodisch ist und vor dem Komma eine 0 steht:

$$0,\overline{6} = \frac{6}{9} \quad 0,\overline{34} = \frac{34}{99} \quad 0,\overline{018} = \frac{18}{999} \quad 0,\overline{00015} = \frac{15}{99999}$$