

Grundlagen der analytischen Geometrie

Teil 0: Perspektivisches Zeichnen

1 Zeichnen eines Würfels

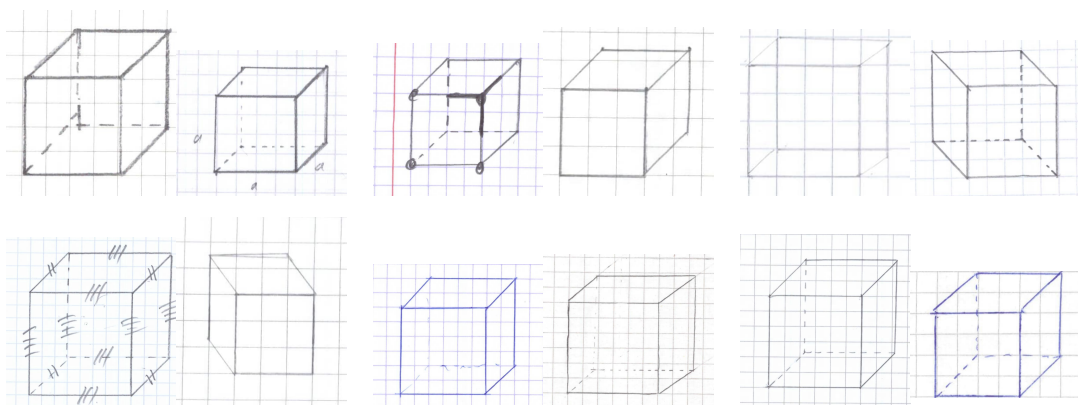
1.1 Erste Ideen

Es gibt sehr viele verschiedene Möglichkeiten einen Würfel auf einem Blatt Papier zu zeichnen.

Ein solches Bild erhält man etwa, wenn man den Würfel von einem Punkt außerhalb des Würfels fotografiert.

Um den dreidimensionalen Charakter zu erhalten, kann man etwa mit Schattierungen arbeiten oder die verdeckten Kanten (das sind die Kanten, die man typischerweise nicht sieht) gestrichelt mit einzeichnen.

Beispiele:



Gemeinsamkeiten:

- Eine Seite des Würfels befindet sich in der Zeichenebene (bzw. parallel zu dieser).
- Es wird auf perspektivische Verzerrung verzichtet (Fluchtpunkt im Unendlichen). Dadurch bleiben parallele Kanten auch parallel, wenn sie in die Zeichenebene hinein zeigen.
- Es wird aus der Vogelperspektive gezeichnet (man sieht den Würfel von schräg oben).

Unterschiede:

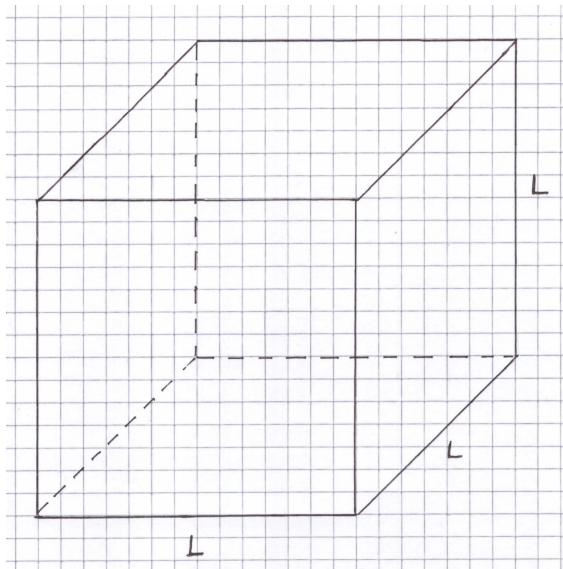
- Vogelperspektive von oben links oder oben rechts .
- Verdeckte Kanten werden mit eingezeichnet oder ausgelassen.
- Der Winkel um den die in die Zeichenebene zeigende Kante gegen die Horizontale geneigt wird variiert (oft 45° , zweimal kleiner und einmal größer).
- Die Länge der in die Zeichenebene weisende Kante variiert.

Es gibt also nicht nur eine Darstellung des Würfels, sondern viele verschiedene. So eine Darstellung eines (dreidimensionalen) Objektes in der (zweidimensionalen) Papierebene auch eine **Projektion**.

1.2 Ein Kompromiss

Um die Mehrdeutigkeiten in den Zeichnungen zu vermeiden einigen wir uns auf folgenden Kompromiss:

- Eine Seite des Würfels befindet sich in der Zeichenebene.
- Verdeckte Kanten werden mit eingezeichnet.
- Keine perspektivische Verzerrung: parallele Kanten sind auch in der Zeichnung parallel.¹
- Vogelperspektive von oben rechts.
- Die in die Zeichenebene zeigende Kanten bilden einen Winkel von 45° mit der Horizontalen.²
- Die Länge der in die Zeichenebene weisende Kante ist um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ verkürzt (2 Kästchen in der Zeichenebene $\hat{=}$ 1 Kästchendiagonale in die Zeichenebene herein).



¹Eine solche Projektion nennt man auch [Parallelprojektion](#).

²Diese spezielle Parallelprojektion nennt man [Kavalierprojektion](#) oder [Kavalierperspektive](#).

1.3 Eine Begründung für den Streckfaktor der Kavalierprojektion

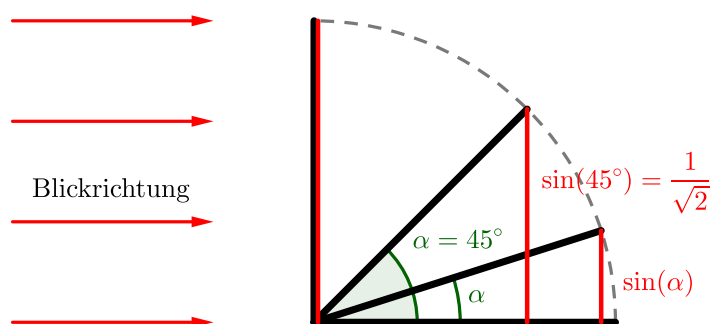
Hält man einen Stift vor sein Auge und zwar liegend in Blickrichtung, so ist seine scheinbare Länge gleich Null. Das liegt daran, dass man die Längsseite des Stiftes nicht sehen kann (in der Abbildung $\alpha = 0^\circ$).

Kippt man diesen Stift nun an, so wächst seine scheinbare Länge (in der Abbildung rot) mit dem Kippwinkel an.

Bei einem Kippwinkel von $\alpha = 90^\circ$ stimmt die scheinbare Länge mit der echten Länge überein.

Nimmt man eine echte Länge von 1 an, dann ergibt sich die scheinbare Länge für einen beliebigen Kippwinkel mit Hilfe der trigonometrischen Ausdrücke zu $\ell = \sin(\alpha)$.

So erhält man etwa für $\alpha = 45^\circ$ eine scheinbare Länge $\ell = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und für $\alpha = 30^\circ$ erhält man $\ell = \frac{1}{2}$.



1.4 Das dreidimensionale Koordinatensystem

Um diesen Kompromiss umzusetzen, verwenden wir ein dreidimensionales Koordinatensystem. Dazu ergänzen wir unser bekanntes zweidimensionales Koordinatensystem um eine weitere Achse, die dann "senkrecht auf der Papierebene" steht.

Da man diese senkrechte Achse nicht sehen würde (vgl. mit dem Stift oben), kippen wir sie wie im Kompromiss beschrieben und skalieren sie mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dadurch erreichen wir, dass wir einen karierten Untergrund unserer Zeichenebene optimal nutzen können.

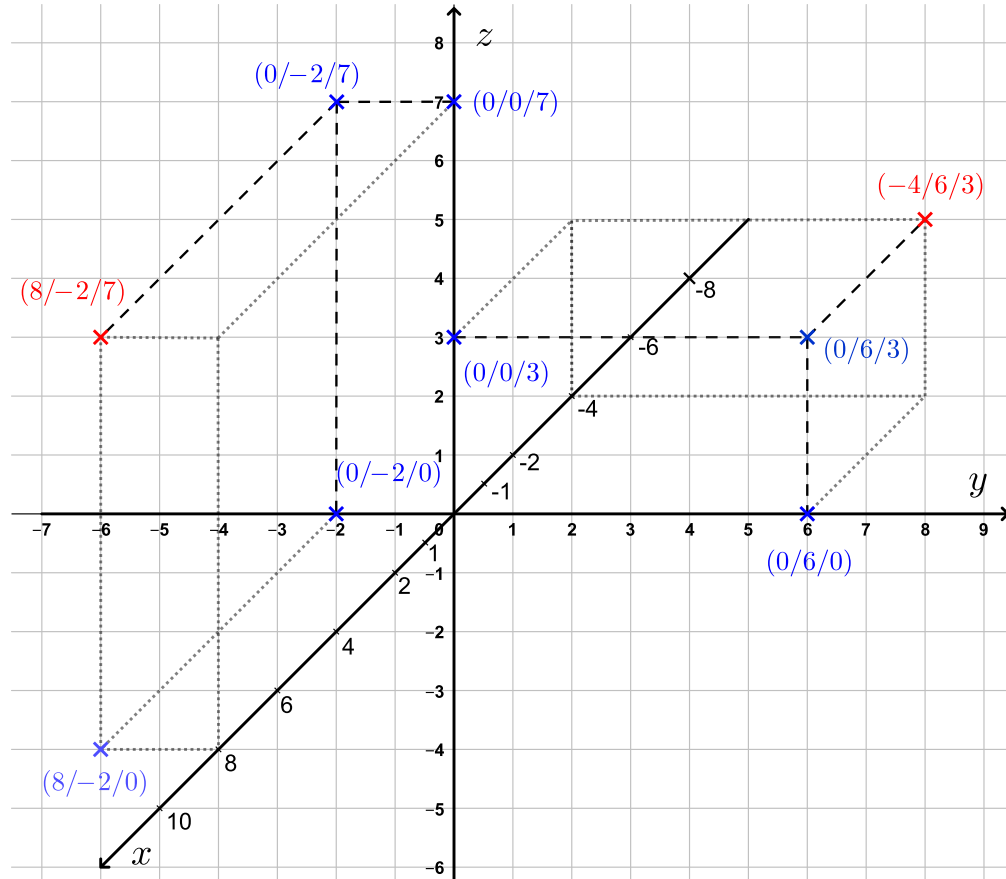
Explizit machen wir die folgende Festlegung:

- Wir haben drei Achsen die x -Achse, die y -Achse und die z -Achse.³
- Damit haben wir drei spezielle Ebenen: die xy -Ebene, die xz -Ebene und die yz -Ebene. Alle drei bilden selber zweidimensionale Koordinatensysteme.
- Wir wählen die Lage der Achsen so, dass die yz -Ebene in der Zeichenebene liegt: y -Achse nach rechts und z -Achse nach oben.
- Die senkrecht dazu stehende x -Achse zeigt aus der Papierebene heraus, also "nach vorne".
- Damit ist die xy -Ebene der "Boden" des Koordinatensystems.

³Manchmal wird statt x , y , und z auch x_1 , x_2 und x_3 verwendet.

Einen Punkt im Raum beschreibt man so mit Hilfe dreier Koordinaten. Diese lesen wir aus dem dreidimensionalen xyz -Koordinatensystem ab. Man schreibt dann z. B. $P(-4/6/3)$ für den Punkt mit x -Komponente -4 , y -Komponente 6 und z -Komponente 3 oder $P(8/-2/7)$ für den Punkt mit x -Komponente 8 , y -Komponente -2 und z -Komponente 7 .

In der folgenden Abbildung sind diese Punkte eingezeichnet mit den Hilfslinien und Hilfspunkten zum Ablesen der Koordinaten:



1.5 Weitere in der Technik verwendete Projektionen

