Frank Klinker

# Grundlagen der analytischen Geometrie

Teil 1: Punkte und Vektoren im Raum

## 1 Punkte im Raum

In der Ebene haben wir Punkte in einem $xy$-Koordinatensystem beschrieben, indem wir die zwei Koordinaten des Punktes auf den Achsen abgelesen haben. Die Achsen waren dabei senkrecht zueinander.

Ein Punkt im Raum beschreiben wir mit Hilfe dreier Koordinaten. Diese lesen wir aus einem $xyz$-Koordinatensystem ab. Zusätzlich zu den zwei Achsen der Ebene, der $x$- und $y$-Achse, gibt es eine dritte, die senkrecht auf den beiden ersten steht, die $z$-Achse.

Ein Punkt hat daher immer drei Koordinaten, wir schreiben z. B.

$$P(-4/6/3)$$

für den Punkt mit der $x$-Komponente $-4$, der $y$-Komponente 6 und der $z$-Komponente 3, siehe Abb. 1.

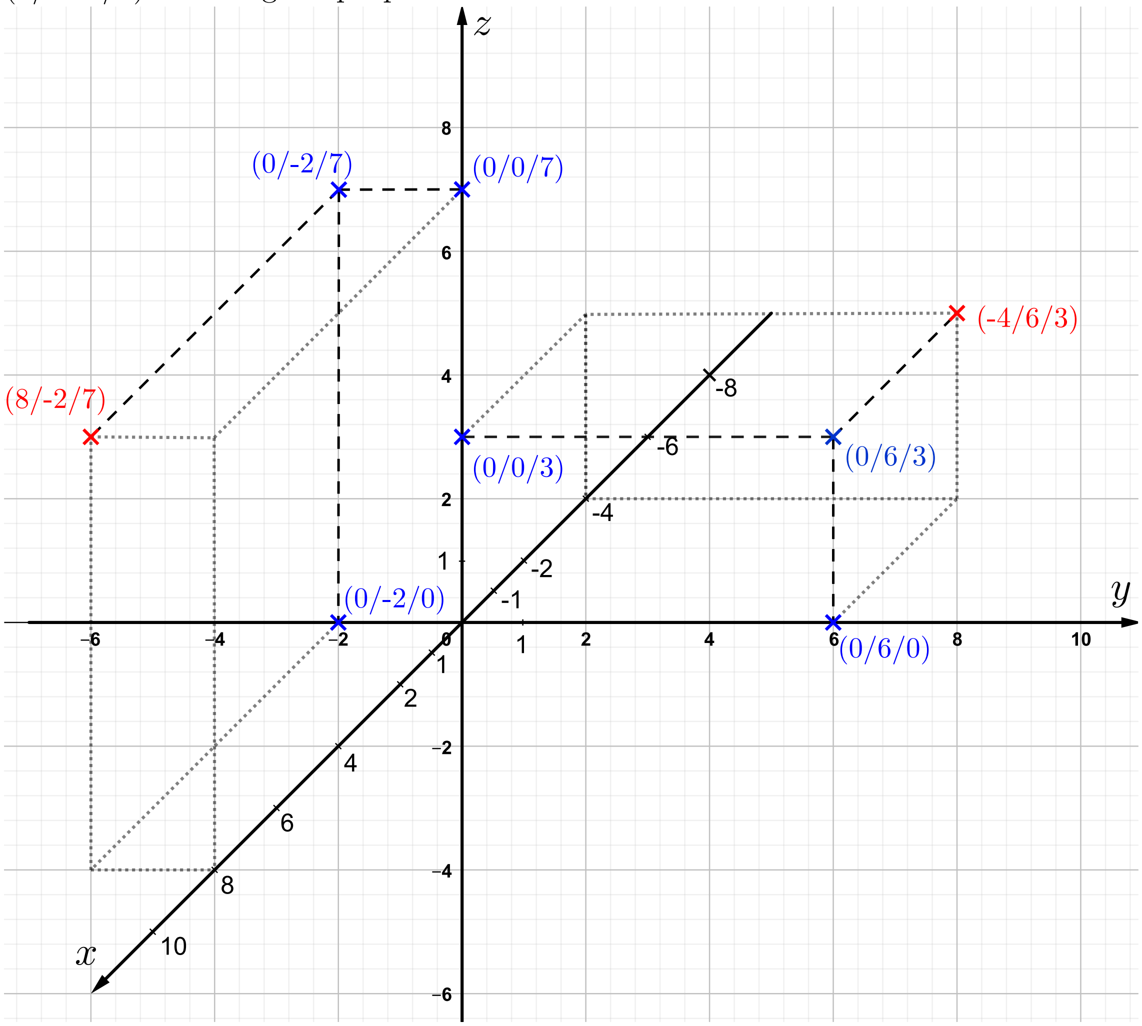
## 2 Vektoren im Raum beschreiben Richtungen

Ein **Vektor** im Raum gibt immer eine **Richtung** an. Neben der Richtung brauchen wir zur genauen Beschreibung eines Vektors auch seine **Länge**.

> Eine Richtung im Raum kann man festlegen, indem man sagt, wie viele Schritte man jeweils in $x$-, in $y$- und in $z$-Richtung gehen soll.
>
> Diese "Schritte" schreiben wir dann untereinander um den zugehörigen Vektor zu beschreiben.
>
> Z. B. ist der Vektor $\vec{v}$, der die Richtung
>
> "4 Schritte in $x$-Richtung, 2,5 Schritte in $y$-Richung, 1 Schritt in $z$-Richtung"
>
> beschreibt, durch
>
> $$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$
>
> gegeben.

*Adresse:* Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
*E-Mail:* mail@frank-klinker.de

Abbildung 1: Das Standardkoordinatensystem mit zur Zeichenebene senkrechter $x$-Achse, deren Skalierung um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ verkleinert ist; die Punkte $(-4/6/3)$ und $(8/-2/7)$ mit einigen Spurpunkten




## 2.1 Aufpunkt- und Verbindungsvektor

Ist ein Punkt $A$ gegeben, so gibt es einen speziellen Vektor, der vom Ursprung $(0/0/0)$ zu $A$ zeigt. Diesen Vektor nennen wir **Aufpunktvektor von** $A$ oder **Ortsvektor von** $A$ und schreiben $\overrightarrow{0A}$.

Seine Komponenten sind genau die Komponenten von $A$ (nur untereinander geschrieben).

**Beispiel 1.** Ist z. B. $A(2/5/-10)$ gegeben, dann ist

$$\overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} .$$

Wir können einen Vektor beschreiben, indem wir sagen, in welchem Punkt er startet und in welchem Punkt er endet.

Ist der Punkt $A$ sein Anfangspunkt und $B$ sein Endpunkt, dann nennen wir den Vektor **Verbindungsvektor von** $A$ **nach** $B$ und schreiben $\overrightarrow{AB}$.

Die Komponenten des Verbindungsvektors erhalten wir, indem wir die Komponenten der Punkte voneinander abziehen. Dabei ziehen wir immer die Komponente des Anfangspunktes von der jeweiligen Komponente des Endpunktes ab.

**Beispiel 2.** Ist $A(-4/5/1)$ der Anfangs- und $B(7/-5/3)$ der Endpunkt, dann ist

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7-(-4) \\ -5-5 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Vertauschen wir die Rollen von $A$ und $B$ als Anfangs- und Endpunkt, so erhalten wir

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -4-7 \\ 5-(-5) \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

**Bemerkung 3.**
1. Der Aufpunkt- oder Ortsvektor eines Punktes $A$ ist der Verbindungsvektor von $(0/0/0)$ nach $A$.
2. Die Komponenten des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AB}$ unterscheidet sich von denen von $\overrightarrow{BA}$ nur durch das Vorzeichen der Komponenten.

### 2.2 Vektoren im Koordinatensystem

So wie wir Punkte in ein Koordinatensystem einzeichnen können, können wir das auch mit Vektoren machen.

Wir realisieren Vektoren zunächst durch Pfeile, die wir im Ursprung des Koordinatensystems starten lassen. Dazu verwenden wir, dass der Vektor bei diesem speziellen Startpunkt gerade der Aufpunktvektor seines Endpunktes ist. Somit können wir die beiden miteinander identifizieren:

**Beispiel 4.**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

stimmt überein mit

$$\overrightarrow{0P} \quad \text{für} \quad P = (3/-1/4) .$$

Der Pfeil zu $\vec{v}$, der in $(0/0/0)$ beginnt endet also in $(3/-1/4)$

Will man den Pfeil zum Vektor $\vec{v}$ an einem anderen Punkt beginnen lassen, so muss man ihn nur dorthin verschieben.

**Beispiel 5.** Der Pfeil zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, der in $B(-4/10/5)$ beginnt, endet in

$$Q(-1/9/9)\,.$$

Diesen Punkt erhalten wir, indem wir die Komponenten von $B$ und $\vec{v}$ einzeln addieren:

$$(-4+3/10+(-1)/4+5) = (-1/9/9)$$

Dass das korrekt ist, sieht man z. B. wenn wir nun den Verbindungsvektor $\overrightarrow{BQ}$ berechnen

$$\overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix} -1-(-4) \\ 9-10 \\ 9-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und genau $\vec{v}$ bekommen.

### 2.3 Die Länge eines Vektors

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras können wir die **Länge eines Vektors** berechnen. Wir schreiben für die Länge eines Vektors

$$|\vec{v}|\,.$$

**Länge eines Vektors**

Ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, dann ist

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\,.$$

**Beispiel 6.** Der Vektor $\overrightarrow{0A}$ aus Beispiel 1 hat die Länge

$$|\overrightarrow{0A}| = \sqrt{2^2+5^2+(-10)^2} = \sqrt{129} \approx 11{,}36\,.$$

Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ aus Beispiel 2 hat die Länge

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{11^2+(-10)^2+2^2} = \sqrt{225} = 15\,.$$

**Bemerkung 7.** Unterscheiden sich die Komponenten zweier Vektoren höchstens durch ein Vorzeichen, so haben sie die gleiche Länge: die Vorzeichen fallen nämlich beim Quadrieren weg.
Daher ist insbesondere für zwei Punkte $A$ und $B$ stets

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|\,.$$

# 3 Mit Vektoren können wir rechnen

Wir werden sehen, dass man mit Vektoren auch rechnen kann. Dabei interessieren uns zwei Rechenarten ganz besonders:

- Wir können Vektoren mit einer Zahl multiplizieren
- Wir können zwei Vektoren addieren oder subtrahieren

Beides kann man auch mit Hilfe der Pfeildarstellung erklären. Damit erhalten die Rechenarten auch eine geometrische Bedeutung.

## 3.1 Die Richtung von Vektoren und die (skalare) Multiplikation

Wir haben ja bereits davon gesprochen, dass Vektoren eine Richtung und eine Länge haben. Wir wollen nun kurz den Begriff der Richtung genauer klären. Dazu sehen wir uns das folgende Beispiel an:

Wir vergleichen zwei Vektoren, die durch ihre Richtungsangaben gegeben sind:

$\vec{v}$ : 2 Schritte in $x$-Richtung, 1 Schritt in $y$-Richtung, 2 Schritte in $z$-Richtung
$\vec{w}$ : 6 Schritte in $x$-Richtung, 3 Schritte in $y$-Richtung, 6 Schritte in $z$-Richtung

Zeichnen wir diese Vektoren beginnen vom selben Startpunkt ein, so sehen wir, dass sie zwar an unterschiedlichen Punkten enden, aber die selbe Richtung beschreiben. Die Komponenten der Vektoren sind

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Wir sehen, dass die Komponenten des einen Vektors jeweils die gleichen Vielfachen der Komponenten des anderen Vektors sind. Wir schreiben das so:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \vec{v} \, .$$

**(Skalare) Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl**

Haben wir einen Vektor $\vec{v}$, so können wir ihn mit einer Zahl $r$ multiplizieren und erhalten einen neuen Vektor $r\,\vec{v}$.

Den neuen Vektor erhalten wir, indem wir jede Komponente von $\vec{v}$ mit $r$ malnehmen.

**Beispiel 8.** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1{,}25 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $r = 4$ gibt

$$r\,\vec{v} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1{,}25 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2{,}5 \\ 4 \cdot 1{,}25 \\ 4 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Wenn zwei Vektoren in die gleiche Richtung weisen bedeutet das also, dass sie sich durch Multiplikation mit einer Zahl ineinander überführen lassen. Solche speziellen Vektoren bekommen auch einen eigenen Namen:

> Wir nennen zwei Vektoren **kollinear** oder **linear abhängig**, wenn sie in die gleiche Richtung zeigen.
>
> Ob zwei Vektoren kollinear sind, lässt sich das sehr einfach entscheiden, indem wir überprüfen, ob es einen gemeinsamen Faktor in den Komponenten gibt.

**Beispiel 9.** a. Wir wollen überprüfen, ob die beiden Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ 2 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ kollinear sind. Dazu suchen wir ein $t$, sodass $\vec{v} = t\vec{w}$ also

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ 2 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} .$$

Wir schreiben das komponentenweise:

$$\begin{array}{rll} 7 & = t \cdot \frac{14}{3} & \mid : \frac{14}{3} \\ 3 & = t \cdot 2 & \mid : 2 \\ -2 & = t \cdot \big( -\frac{4}{3}\big) & \mid : \big( -\frac{4}{3}\big) \\ \hline 1{,}5 & = t & \\ 1{,}5 & = t & \\ 1{,}5 & = t & \end{array}$$

Damit gibt es den gesuchten Parameterwert, nämlich $t = \frac{3}{2}$.

b. Als nächstes wollen wir überprüfen, ob die beiden Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 48 \\ -24 \\ 94 \end{pmatrix}$ kollinear sind. Dazu suchen wir ein $t$, sodass $\vec{w} = t\vec{v}$ also

$$\begin{pmatrix} 78 \\ -24 \\ 94 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

Wir schreiben auch hier wieder komponentenweise:

$$\begin{array}{rll} 48 & = t \cdot 4 & \mid : 7 \\ -24 & = t \cdot (-2) & \mid : (-2) \\ 94 & = t \cdot 8 & \mid : 8 \\ \hline 12 & = t & \\ 12 & = t & \\ 11{,}75 & = t & \end{array}$$

Damit gibt es so einen gesuchten Parameterwert nicht und die Vektoren sind nicht kollinear (dieser Parameterwert müsste für alle Komponenten gleich sein).

Die Multiplikation kann man auch geometrisch mit Hilfe der beschreibenden Pfeile erklären:

**Geometrische Interpretation der skalaren Multiplikation**

Die skalare Multiplikation eines Vektors mit einer positiven Zahl bewirkt eine Streckung oder eine Stauchung des zugehörigen Pfeils, je nach dem ob die Zahl größer oder kleiner als 1 ist.

Ist die Zahl negativ, so zeigt der Pfeil des Ergebnisvektors zusätzlich zur Streckung/Stauchung noch in die entgegengesetzte Richtung.

### 3.2 Addieren und Subtrahieren von Vektoren

Auch die Addition von Vektoren ist zunächst recht anschaulich motiviert. Dazu sehen wir uns zwei Vektoren und deren "Schrittdefinition" an:

$$\begin{aligned}\vec{v} &: 1 \text{ Schritte in } x\text{-Richtung, } 4 \text{ Schritte in } y\text{-Richtung, } 11 \text{ Schritte in } z\text{-Richtung}\\ \vec{w} &: 3 \text{ Schritte in } x\text{-Richtung, } 4 \text{ Schritte in } y\text{-Richtung, } 6 \text{ Schritte in } z\text{-Richtung}\end{aligned}$$

Wir wenden diese "Anweisungen" nun hintereinander aus und sehen, dass wir stattdessen auch die folgende Anweisung befolgen können:

$$4 \text{ Schritte in } x\text{-Richtung, } 8 \text{ Schritte in } y\text{-Richtung, } 17 \text{ Schritte in } z\text{-Richtung}\,.$$

Schreiben wir das in "Vektorschreibweise":

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Hier sieht man, dass wir den "Ersatzvektor" erhalten haben, indem wir die einzelnen Komponenten von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ addiert haben.

Genau das ist die Addition (oder Subtraktion) von Vektoren:

**Addition und Subtraktion von Vektoren**

Durch die Addition oder Subtraktion von zwei Vektoren erhalten wir einen neuen Vektor.

Die Komponenten des neuen Vektors bekommen wir, indem wir die Komponenten der alten Vektoren addieren oder subtrahieren.

**Beispiel 10.** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ gibt

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + (-6) \\ 2 + 5 \\ -1 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-6) \\ 2 - 5 \\ -1 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Auch die Addition (und damit die Subtraktion) von zwei Vektoren können wir geometrisch beschreiben

**Geometrische Interpretation der Addition**

Wenn zwei Vektoren als Pfeile gegeben sind, dann erhalten wir den Pfeil, der zur Summe der beiden Vektoren gehört, wie folgt:

Wir zeichnen den ersten Pfeil ein. An sein Ende zeichnen wir den zweiten Pfeil. Dann verbinden wir den Anfangspunkt des ersten mit dem Endpunkt des zweiten Pfeils. Das liefert den Pfeil des Ergebnisvektors, siehe Abb. 2.

**Bemerkung 11.** Die Differenz zweier Vektoren bekommt man geometrisch, indem man verwendet, dass $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$ ist. Wir müssen also lediglich die Vektoren $\vec{v}$ und $-\vec{w}$ addieren, siehe Abb. 2.

Abbildung 2: Geometrische Interpretation von Summe und Differenz