Frank Klinker

# Grundlagen der analytischen Geometrie

Teil 3: Ebenen im Raum

## 1 Parameterdarstellung einer Ebene im Raum

Ähnlich, wie wir die Geraden im Raum geometrisch charakterisiert haben, können wir das auch für Ebenen machen:

(i) Eine Ebene ist durch die Angabe von zwei Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, bestimmt.

(ii) Eine Ebene ist durch die Angabe von drei Punkten bestimmt, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Wir formulieren Punkt (i) ein wenig um, indem wir verwenden, was wir bereits kennen:

(i') Eine Ebene ist durch die Angabe eines Punktes und zwei Richtungsvektoren, die nicht kollinear sind, bestimmt.

### 1.1 Die Parameterdarstellung

Wir starten mit (i') und nehmen an, dass wir einen Punkt $A$ und zwei Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gegeben haben. Diese spannen eine Ebene auf. Den Aufpunktvektor $\overrightarrow{0P}$ eines beliebigen Punktes $P$ der Ebene erhalten wir nun, indem wir

1. vom Ursprung mit Hilfe des Aufpunktvektors $\overrightarrow{0A}$ zum gegebenen Punkt $A$ gehen und dann
2. a) ein festes Stück in Richtung $\vec{v}$ gehen und dann

   b) ein festes Stück in Richtung $\vec{w}$ gehen, bis wir den Punkt $P$ erreicht haben.

   Den zugehörigen Vektor, der uns von $A$ zu $P$ bringt, erhalten wir, indem wir $\vec{v}$ mit einer geeigneten Zahl $t$ multiplizieren, $\vec{w}$ mit einer geeigneten Zahl $s$ multiplizieren und dann beide Vektoren addieren.

Zusammengefasst haben wir also

$$\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0A} + t\vec{v} + s\vec{w}\,.$$

*Adresse:* Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
*E-Mail:* mail@frank-klinker.de

Ändern wir nun die Zahlen $t$ und $s$, dann erreichen wir andere Punkte der Ebene.

Damit haben wir auch bereits eine Beschreibung der Ebene, die uns interessiert:

> **Parameterdarstellung einer Ebene**
>
> Eine Ebene $\mathcal{E}$, die durch einen Punkt $A$ und zwei Richtungen $\vec{v}$, $\vec{w}$ definiert ist, besitzt die Parameterdarstellung
>
> $$\mathcal{E}: \quad \vec{x}(t;s) = \overrightarrow{0A} + t\vec{v} + s\vec{w}$$
>
> Dabei erlauben die Parameter $t$ und $s$, dass wir alle Punkte der Ebene erreichen, wenn wir sie variieren.

**Beispiel 1.** Die Ebene $\mathcal{E}$ ist durch den Punkt $A(1/1/4)$ und die Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ geben. Dann ist

$$\vec{x}(t;s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

die Parameterdarstellung von $\mathcal{E}$.

Für $t = 1$, $s = -1$ haben wir etwa

$$\vec{x}(1;-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2-0 \\ 1+1-1 \\ 4-3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

sodass der Punkt $(3/1/0)$ auf der Ebene liegt.

Für $t = \frac{1}{2}$, $s = \frac{3}{2}$ ist

$$\vec{x}\left(\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+0 \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{3}{2} \\ 4-\frac{3}{2}+\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} ,$$

sodass der Punkt $\big(2/3/4\big)$ auf der Ebene liegt.

Wenden wir uns der Situation (ii) zu, in der eine Gerade $\mathfrak{k}$ durch drei Punkte $A$, $B$ und $C$ gegeben ist. Diesen Fall führt man sehr einfach auf den Fall (i) zurück:

> Ist eine Ebene durch drei Punkte $A, B$ und $C$ gegeben, dann wählt man einen der drei Punkte als Aufpunkt der Geraden und als Richtungsvektoren nutzt man zwei der drei möglichen Verbindungsvektoren.
>
> Wählen wir etwa $A$ als Aufpunkt und $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Richtungsvektoren, dann ist eine Parameterform der Ebene durch
>
> $$\vec{x}(t;s) = \overrightarrow{0A} + t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} .$$

**Bemerkung 2.** In der obigen Konstruktion sieht man bereits, dass die Parameterform einer Ebene nicht eindeutig ist. Es gibt sehr viele verschiedene Parameterformen der selben Ebene.

Im Gegensatz zu der ähnlichen Situation bei Geraden, ist es oft nicht so einfach zu sehen, ob zwei Parameterformen die selbe Ebene beschreiben.

**Beispiel 3.** Unsere Ebene $\mathcal{E}$ ist durch die Punkte $A(1/0/1)$, $B(2/-2/1)$ und $C(4/1/-3)$ gegeben. Die drei verschiedenen Richtungsvektoren sind[1]

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-0 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und

$$\text{und } \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 1-(-2) \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Abgesehen von der Wahl des Aufpunktes, den wir mit $A$ fest wählen, erhalten wir ausgehend von den drei gegebenen Punkten bereits drei mögliche Parameterdarstellungen von $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t;s) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(t;s) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(t;s) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eine weitere Parameterform der gleichen Geraden ergibt sich zu

$$x(t,s) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Wenn man auch bei den ersten drei Parameterdarstellungen noch ein Gefühl dafür bekommen kann, dass die beschriebene Ebene jeweils die gesuchte ist, dann sieht man das bei der vierten sicher nicht mehr "auf einem Blick".

Die Begründung für die Frage, ob die letzte Parameterdarstellung tatsächlich die Ebene $\mathcal{E}$ beschreibt folgt im nächsten Abschnitt in Bemerkung 5.

[1] Drei Punkte liegen genau dann nicht auf einer gemeinsamen Geraden, wenn ihre drei Verbindungsvektoren nicht kollinear sind. Das ist hier der Fall.

## 1.2 Liegt ein Punkt auf einer Ebene? (1)

Wir wollen überprüfen, ob ein Punkt $Q$ auf einer Ebene liegt, die in Parameterdarstellung vorliegt.

> Ist die Parameterdarstellung
>
> $$\vec{x}(t;s) = \overrightarrow{0A} + t\vec{v} + s\vec{w}\,,$$
>
> dann liegt der Punkt $Q$ liegt genau dann auf der Ebene, wenn wir zwei Parameterwert $s_0$ und $t_0$ finden, so dass
>
> $$\overrightarrow{0Q} = \overrightarrow{0A} + t_0\vec{v} + s_0\vec{w}$$
>
> gilt.

Wir untersuchen das an der Ebene und den Punkten aus Beispiel 3 des letzten Abschnitts:

**Beispiel 4.** Die Ebene $\mathcal{E}$ ist gegeben durch

$$x(t,s) = \begin{pmatrix}5\\-1\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-1\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\-4\\8\end{pmatrix}\,.$$

a) Liegt der Punkt $A(1/0/1)$ auf der Ebene $\mathcal{E}$?

Dazu suchen wir zwei Parameterwerte $s, t$, sodass

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-1\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\-4\\8\end{pmatrix}\,.$$

Wir schreiben das komponentenweise und erhalten

$$\begin{array}{lrl|l}
 & 1 = & 5 + t\cdot 4 + s\cdot(-5) & -5 \\
 & 0 = & -1 + t\cdot(-1) + s\cdot(-4) & +1 \\
 & 1 = & -3 + t\cdot(-4) + s\cdot 8 & +3 \\
\hline
 & -4 = & 4t - 5s & \\
 & 1 = & -t - 4s & \cdot 4 \\
 & 4 = & -4t + 8s & \\
\hline
 & -4 = & 4t - 5s & \\
 & 4 = & -4t - 16s & \\
 & 4 = & -4t - 16s & \\
\hline
 & -4 = & 4t - 5s & \\
 & 0 = & -21s & (I + II) \\
 & 0 = & 0 & (II - III) \\
\hline
\text{aus } II: & 0 = & s & \\
s = 0 \text{ in } I: & -4 = & 4t - 5\cdot 0 \iff -1 = t &
\end{array}$$

Das Ergebnis des LGS ist $s = 0$ und $t = -1$. Damit gibt es die gesuchten Parameterwerte und der Punkt $A$ liegt auf der Ebene.

b) Liegt der Punkt $B(2/-2/1)$ auf der Ebene $\mathcal{E}$?

Wieder suchen wir zwei Parameterwerte $s, t$, sodass

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

Auch hier schreiben wir das komponentenweise:

$$\begin{array}{rrl}
 & 2 = 5 + t \cdot 4 + s \cdot (-5) & \mid -5 \\
 & -2 = -1 + t \cdot (-1) + s \cdot (-4) & \mid +1 \\
 & 1 = -3 + t \cdot (-4) + s \cdot 8 & \mid +3 \\
\cline{2-3}
 & -3 = 4t - 5s & \\
 & -1 = -t - 4s & \mid \cdot 4 \\
 & 4 = -4t + 8s & \\
\cline{2-3}
 & -3 = 4t - 5s & \\
 & -4 = -4t - 16s & \\
 & 4 = -4t - 16s & \\
\cline{2-3}
 & -3 = 4t - 5s & \\
 & -7 = -21s & (I + II) \\
 & 0 = 0 & (II - III) \\
\hline
\text{aus } II: & \frac{1}{3} = s & \\
s = \frac{1}{3} \text{ in } I: & -3 = 4t - 5 \cdot \frac{1}{3} \iff -\frac{1}{3} = t &
\end{array}$$

Als Ergebnis erhalten wir $s = \frac{1}{3}$ und $t = -\frac{1}{3}$. Damit gibt es die gesuchten Parameterwerte und der Punkt $B$ liegt auf der Ebene.

c) Liegt der Punkt $C(4/1/-3)$ auf der Ebene $\mathcal{E}$?

Und wieder suchen wir zwei Parameterwerte $s, t$, sodass

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

und schreiben das komponentenweise:

$$\begin{array}{rrl}
 & 4 = 5 + t \cdot 4 + s \cdot (-5) & \mid -5 \\
 & 1 = -1 + t \cdot (-1) + s \cdot (-4) & \mid +1 \\
 & -3 = -3 + t \cdot (-4) + s \cdot 8 & \mid +3 \\
\cline{2-3}
 & -1 = 4t - 5s & \\
 & 2 = -t - 4s & \mid \cdot 4 \\
 & 0 = -4t + 8s & \\
\cline{2-3}
 & -1 = 4t - 5s & \\
 & 8 = -4t - 16s & \\
 & 0 = -4t - 16s & \\
\cline{2-3}
 & -1 = 4t - 5s & \\
 & 7 = -21s & (I + II) \\
 & 0 = 0 & (II - III) \\
\hline
\text{aus } II: & -\frac{1}{3} = s & \\
s = -\frac{1}{3} \text{ in } I: & -1 = 4t - 5 \cdot (-\frac{1}{3}) \iff -\frac{2}{3} = t &
\end{array}$$

Als Ergebnis erhalten wir $s = -\frac{1}{3}$ und $t = -\frac{2}{3}$. Damit gibt es die gesuchten Parameterwerte und der Punkt $C$ liegt auf der Ebene.

**Bemerkung 5.** In vorigen Beispiel 4 liegen alle Punkte $A, B$ und $C$ auf der Ebene $\mathcal{E}$. Deshalb muss $\mathcal{E}$ mit der Ebene, die durch $A$,$B$ und $C$ aufgespannt wird übereinstimmen. Das beantwortet auch die Frage am Schluss von Beispiel 3.

Wir schließen mit zwei Beispielen, wo der Punkt nicht auf der fraglichen Ebene liegt

**Beispiel 6.** a) $P(2/2/4)$, $\mathcal{E} : \vec{x}(s,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir suchen zwei Parameterwerte $s, t$, sodass

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Komponentenweise geschrieben ist das:

$$\begin{array}{ll|l}
 & 2 = 2 + t \cdot 8 + s \cdot 0 & |-2 \\
 & 2 = 1 + t \cdot (-2) + s \cdot 4 & |-1 \\
 & 4 = 0 + t \cdot 1 + s \cdot 1 & \\
\cline{2-3}
 & 0 = 8t & \\
 & 1 = -2t + 4s & \\
 & 4 = t + s & \\
\hline
\text{aus } I: & 0 = t & \\
t = 0 \text{ in } II: & 1 = 0 + 4s \iff \frac{1}{4} = s &
\end{array}$$

Die Probe in der verbleibenden Gleichung III gibt $4 = 0 + \frac{1}{4}$ und zeigt, dass die gefundenen Parameterwerte das LGS nicht lösen . Damit gibt es die gesuchten Parameterwerte nicht und der Punkt $P$ liegt nicht auf der Ebene.

b) $R(2/9/5)$, $\mathcal{E} : \vec{x}(s,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir suchen zwei Parameterwerte $s, t$, sodass

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Komponentenweise geschrieben ist das:

$$
\begin{array}{rrll}
 & 2 &= 2 + t \cdot 4 + s \cdot 1 & | - 2 \\
 & 9 &= 0 + t \cdot (-2) + s \cdot 4 & \\
 & 5 &= 2 + t \cdot 1 + s \cdot 1 & | - 2 \\
\hline
 & 0 &= 4t + s & \\
 & 9 &= -2t + 4s & | \cdot 2 \\
 & 3 &= t + s & | \cdot 4 \\
\hline
 & 0 &= 4t + s & \\
 & 18 &= -4t + 8s & \\
 & 12 &= 4t + 4s & \\
\hline
 & 0 &= 4t + s & \\
 & 18 &= 9s & (I + II) \\
 & 12 &= 3s & (III - I) \\
\hline
\text{aus } II: & 2 &= s & \\
\text{aus } III: & 4 &= s &
\end{array}
$$

An dieser Stelle liefert das LGS bereits eine widersprüchliche Lösung. Damit gibt es die gesuchten Parameterwerte nicht und der Punkt $R$ liegt nicht auf der Ebene.

# 2 Koordinatendarstellung einer Ebene im Raum

Wir stellen hier eine zweite Beschreibung einer Ebene im Raum vor: die Koordinatendarstellung. Diese ergibt sich aus der Parameterdarstellung, indem man "die Parameter entfernt".

Wir werden hier exemplarisch vorgehen. Eine systematischer Untersuchung zeigt, dass auch die Koordinatendarstellung nützliche, geometrische Interpretation hat. Diese Untersuchung verschieben wir jedoch auf einen späteren Zeitpunkt.

## 2.1 Die Koordinatendarstellung

Wenn eine Ebene in Parameterdarstellung $\vec{x}(s;t) = \overrightarrow{0A} + t\vec{v} + s\vec{w}$ mit $A = (a_1/a_2/a_3)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ gegeben ist, dann lassen sich alle Punkte $P(x/y/z)$ der Ebene mit Hilfe der Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x &= a_1 + v_1 t + w_1 s \\
y &= a_2 + v_2 t + w_2 s \\
z &= a_3 + v_3 t + w_3 s
\end{aligned}
$$

beschreiben. Um die **Koordinatenform** der Ebene zu erhalten geht man wie folgt vor:

- Löse einer der Gleichungen nach $s$ auf

- Setze das Ergebnis dann in die beiden anderen Gleichungen ein
- Nimm ein der beiden erhaltenen Gleichungen und löse sie nach $t$ auf
- Setze das Ergebnis in die verbleibende Gleichung ein

(hier darf man die Rollen von $s$ und $t$ vertauschen)

**Die Koordinatendarstellung einer Ebene**

Das Resultat ist des obigen Algorithmus ist eine Gleichung, in der die Parameter nicht mehr vorkommen, sondern die Variablen $x, y$ und $z$. Sie hat die Form

$$\boxed{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d}$$

mit vier Zahlen $a, b, c, d$.

Die Koordinatenform ist nicht eindeutig: Wenn man eine Koordinatenform hat, dann kann man beide Seiten der Gleichung mit der gleichen Zahl multiplizieren oder durch die gleiche Zahl teilen und man erhält eine weitere Koordinatendarstellung zur selben Ebene.

Wir führen das an drei Beispielen durch:

**Beispiel 7.** a) $\vec{x}(t; s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die drei Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 1 + t + s \\ z &= 4 - 3t + s \end{aligned}$$

- Wir lösen die zweite Gleichung nach $s$ auf:

$$s = y - 1 - t$$

- Das setzen wir in die beiden anderen Gleichungen ein (wobei die erste bereits gar kein $s$ enthält):

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ z &= 4 - 3t + (y - 1 - t) = 4 - 3t + y - 1 - t = y + 3 - 4t \end{aligned}$$

- Jetzt lösen wir die erste der beiden Gleichungen nach $t$ auf:

$$t = \tfrac{1}{2}(x - 1)$$

- Das setzen wir in die verbleibende Gleichung ein:

$$z = y + 3 - 4 \cdot \tfrac{1}{2}(x - 1) = y + 3 - 2x + 2 = y - 2x + 5$$

Sortieren wir das etwas um, dann erhalten wir eine Koordinatenform der Ebene:

$$2x - y + z = 5\,.$$

b) $\vec{x}(t;s) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$

Die drei Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3t + 2s \\ y &= t + 3s \\ z &= 1 - 4t - 4s \end{aligned}$$

– Wir lösen die zweite Gleichung nach $t$ auf:

$$t = y - 3s$$

– Das setzen wir in die beiden anderen Gleichungen ein:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3(y-3s) + 2s = 1 + 3y - 9s + 2s = 3y + 1 - 7s \\ z &= 1 - 4(y-3s) - 4s = 1 - 4y + 12s - 4s = -4y + 1 + 8s \end{aligned}$$

– Jetzt lösen wir die erste der beiden Gleichungen nach $s$ auf:

$$s = \tfrac{1}{7}(3y - x + 1)$$

– Das setzen wir in die verbleibende Gleichung ein:

$$z = -4y + 1 + 8\cdot\tfrac{1}{7}(3y - x + 1) = -4y + 1 + \tfrac{24}{7}y - \tfrac{8}{7}x + \tfrac{8}{7} = -\tfrac{8}{7}x - \tfrac{4}{7}y + \tfrac{15}{7}$$

Sortieren wir das etwas um, dann erhalten wir eine Koordinatenform der Ebene:

$$\tfrac{8}{7}x + \tfrac{4}{7}y + z = \tfrac{15}{7}\,.$$

Multiplizieren wir noch mit 7, dann werden wir auch die Brüche wieder los:

$$8x + 4y + 7z = 15\,.$$

c) $\vec{x}(s;t) = \begin{pmatrix}5\\-1\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-1\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\-4\\8\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x &= 5 + 4t - 5s \\ y &= -1 - t - 4s \\ z &= -3 - 4t + 8s \end{aligned}$$

– Wir lösen die zweite Gleichung nach $t$ auf:

$$t = -1 - y - 4s$$

– Das setzen wir in die beiden anderen Gleichungen ein:

$$x = 5 + 4(-1 - y - 4s) - 5s = 5 - 4 - 4y - 16s - 4s = -4y + 1 - 21s$$
$$z = -3 - 4(-1 - y - 4s) + 8s = -3 + 4 + 4y + 16s + 8s = 4y + 1 + 24s$$

– Jetzt lösen wir die zweite der beiden Gleichungen nach $s$ auf:

$$s = \tfrac{1}{24}(z - 4y - 1)$$

– Das setzen wir in die verbleibende Gleichung ein:

$$x = -4y + 1 - 21 \cdot \tfrac{1}{24}(z - 4y - 1) = -4y + 1 - \tfrac{7}{8}z + \tfrac{7}{2}y + \tfrac{7}{8} = -\tfrac{1}{2}y - \tfrac{7}{8}z + \tfrac{15}{8}$$

Sortieren wir das etwas um, dann erhalten wir eine Koordinatenform der Ebene:

$$x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{7}{8}z = \tfrac{15}{8}\,.$$

Hier multiplizieren wir noch mit 8, um die Brüche loszuwerden und erhalten

$$8x + 4y + 7z = 15\,.$$

Dass die Ebenen b) und c) die gleichen sind, wissen wir bereits aus Beispiel 3 und Bemerkung 5.

## 2.2 Liegt ein Punkt auf einer Ebene? (2)

Wenn eine Ebene in Koordinatendarstellung vorliegt, ist die Untersuchung, ob ein Punkt auf der Ebene liegt, extrem einfach: Wir setzen den Punkt in die Gleichung ein und überprüfen, ob das Ergebnis wahr oder falsch ist.

**Beispiel 8.** a) Liegt $P(-14/8/40)$ auf der Ebene $2x - y + z = 5$?

Einsetzen gibt

$$2 \cdot (-14) - 8 + 40 = 5 \iff 4 = 5\,.$$

Da das Ergebnis falsch ist, liegt $P$ nicht auf der Ebene.

b) Liegt $Q(7/-8/-17)$ auf der Ebene $2x - y + z = 5$?

Einsetzen gibt

$$2 \cdot 7 - (-8) + (-17) = 5 \iff 5 = 5\,.$$

Da das Ergebnis wahr ist, liegt $Q$ auf der Ebene.

c) Liegt $A(5/-1/-3)$ auf der Ebene $8x + 4y + 7z = 15$?

Einsetzen gibt

$$8 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) + 7 \cdot (-3) = 15 \iff 15 = 15\,.$$

Da das Ergebnis wahr ist, liegt $A$ auf der Ebene.

d) Liegt $B(1/-2/1)$ auf der Ebene $8x + 4y + 7z = 15$?

Einsetzen gibt

$$8 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 = 15 \iff 7 = 15\,.$$

Da das Ergebnis falsch ist, liegt $B$ nicht auf der Ebene.