Frank Klinker

Grundlagen der analytischen Geometrie

Teil 5: Lagebeziehungen Gerade/Ebene und Ebene/Ebene
(bei vorliegender Parameterform)

1 Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene in Parameterform

Man kann leicht einsehen, dass es im Falle einer Geraden und einer Ebene genau drei Möglichkeiten gibt, wie diese zueinander liegen können:

a) Die Gerade und die Ebene schneiden sich "echt": Es gibt genau einen Schnittpunkt; nämlich dort, wo die Gerade die Ebene durchstösst.
b) Die Gerade liegt parallel zur Ebene: Es gibt keinen Schnittpunkt.
c) Die Gerade liegt in der Ebene: Es gibt mehr als einen Schnittpunkt; sogar alle Punkte der Geraden sind Schnittpunkte.

Im Gegensatz zur Situation zweier Geraden kann man die Parallelität von Ebene und Gerade in der Regel nicht so einfach sehen, wenn diese in Parameterform vorliegen.

Aber zum Glück kann die Herangehensweise zur Entscheidung, wie eine gegebenen Gerade und Ebene zueinander liegen, stets die gleiche sein: Wir suchen den/die Schnittpunkte!

Wir nehmen eine Ebene $\mathcal{E}$ mit Aufpunktvektor $\vec{a}$ und Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$

$$\mathcal{E} : \vec{x}(t,s) = \vec{a} + t\,\vec{v} + s\,\vec{w}$$

sowie eine Gerade $\mathfrak{g}$ mit Aufpunktvektor $\vec{b}$ und Richtungsvektor $\vec{u}$

$$\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \vec{b} + t\,\vec{u}\,.$$

Zur Suche nach Schnittpunkten setzen wir beide gleich. Dabei müssen wir beachten, dass wir es hier mit drei Parametern zu tun haben: zwei von der Ebene und einer von der Geraden. Diese müssen unterschiedliche Namen haben:

$$\vec{a} + t\,\vec{v} + s\,\vec{w} = \vec{b} + r\vec{u}\,.$$

Das ist ein LGS mit drei Gleichungen (die drei Vektorkomponenten) und drei Variablen (die drei Parameter).

Dieses LGS kann entweder eine, keine oder unendlich viele Lösungen haben. Das liefert und dann auch die gegenseitige Lage von $\mathcal{E}$ und $\mathfrak{g}$: Eine Lösung entspricht Fall a), keine Lösung entspricht Fall b) und unendlich viele Lösungen entspricht Fall c).

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

Wir führen das an drei Beispielen durch:

Beispiel 1. $\mathcal{E}: \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{g}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

Wir setzen gleich:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \\
\iff &\left\{ \begin{array}{r} -1 + 2t - 2s = 1 - 3r \\ 5 + 4t - 3s = -3 + r \\ -3 - 2t - s = 7 - 6r \end{array} \right\} \\
\iff &\left\{ \begin{array}{r} 2t - 2s + 3r = 2 \\ 4t - 3s - r = -8 \\ -2t - s + 6r = 10 \end{array} \right\} \qquad \Big| \, III + I \text{ und } II - 2 \cdot I \\
\iff &\left\{ \begin{array}{r} 2t - 2s + 3r = 2 \\ s - 7r = -12 \\ -3s + 9r = 12 \end{array} \right\} \qquad \Big| \, III + 3 \cdot II \\
\iff &\left\{ \begin{array}{r} 2t - 2s + 3r = 2 \\ s - 7r = -12 \\ -12r = -24 \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Aus III bekommen wir $r = 2$. In II gibt das $s - 7 \cdot 2 = -12 \iff s = 2$. Beides in I gibt dann $2t - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 2 \iff t = 0$.

Es gibt also genau einen Schnittpunkt und wir sind im Fall a).

Den Schnittpunkt berechne man nun, indem man die korrekten Parameter in $\mathcal{E}$ und/oder $\mathfrak{g}$ einsetzt:

$$\begin{aligned}
\text{in } \mathcal{E}: \vec{x}(0;2) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \\
\text{in } \mathfrak{g}: \vec{x}(2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also lautet der Schnittpunkt $S(-5/-1/-5)$.

Beispiel 2. $\mathcal{E}: \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{g}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Wir setzen gleich:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \\
\iff &\left\{ \begin{array}{l} -2 + 2t + 2s = 3r \\ -3 + 2t - 3s = -4 - 2r \\ -2 + 2t - 6s = -5 - 5r \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2t+2s-3r &= 2 \\ 2t-3s+2r &= -1 \\ 2t-6s+5r &= -3 \end{aligned}\right\} \qquad \Big| II - I \text{ und } III - I$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2t+2s-3r &= 2 \\ -5s+5r &= -3 \\ -8s+8r &= -5 \end{aligned}\right\} \qquad \Big| 5 \cdot III - 8 \cdot II$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2t+2s-3r &= 2 \\ -5s+5r &= -3 \\ 0 &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Da die letzte Gleichung immer falsch ist, besitzt dieses LGS keine Lösung. Damit gibt es keinen Schnittpunkt, d. h. $\mathcal{E}$ und $\mathfrak{g}$ sind echt parallel.

Beispiel 3. $\mathcal{E}: \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{g}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Wir setzen gleich:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} -2-t+4s &= -8r \\ -3-t-2s &= -7+4r \\ -2-t+s &= -3-2r \end{aligned}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} -t+4s+8r &= 2 \\ -t-2s-4r &= -4 \\ -t+s+2r &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad \Big| II - I \text{ und } III - I$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} -t+4s-2r &= 2 \\ -6s-12r &= -6 \\ -3s-6r &= -3 \end{aligned}\right\} \qquad \Big| II - 2 \cdot III$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2t+2s-3r &= 2 \\ -6s-12r &= -6 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Dieses LGS hat unendlich viele Lösungen. Damit verläuft die Gerade $\mathfrak{g}$ ganz innerhalb der Ebene $\mathcal{E}$.

2 Lagebeziehung zwischen Ebenen in Parameterform

[folgt]

3 Weitere Hinweise und Kommentare

3.1 Zur Lagebeziehung Ebene/Gerade

Manchmal kann man bereits anhand der Richtungsvektoren der Ebene $\vec{v}$, $\vec{w}$ und der Gerade $\vec{u}$ sehen, dass beide parallel sind:

- Im einfachsten Fall ist bereits $\vec{u}$ ein Vielfaches von $\vec{v}$ oder $\vec{w}$.
- Oder man "sieht" Zahlen d und e, sodass $u = d\,\vec{v} + e\,\vec{w}$. Das zu sehen braucht aber ein wenig Übung

In diesem Fall weiß man bereits vorab, dass der Fall b) oder c) vorliegt und man muss "nur noch" überprüfen, ob auch der Aufpunkt der Geraden $\mathfrak{g}$ in der Ebene $\mathcal{E}$ liegt.[1],

Beispiel 4. • In Beispiel 2 sind $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ die Richtungsvektoren von $\mathcal{E}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ der Richtungasvektor von $\mathfrak{g}$.

Durch "scharfes Hinsehen" sieht man

$$\vec{u} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v} + 1 \cdot \vec{w}$$

Jetzt überprüfen wir noch ob der Aufpunkt von $\mathfrak{g}$ in der Ebene $\mathcal{E}$ liegt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} 2t + 2s &= 2 \\ 2t - 3s &= -1 \\ 2t - 6s &= -3 \end{aligned} \right\} \qquad \Big| \mathit{II} - I \text{ und } \mathit{III} - I$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} 2t + 2s &= 2 \\ -5s &= -3 \\ -8s &= -5 \end{aligned} \right\} \qquad \Big| 5 \cdot \mathit{III} - 8 \cdot \mathit{II}$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} 2t + 2s &= 2 \\ -5s &= -3 \\ 0 &= -1 \end{aligned} \right\}$$

[1] Das "nur noch" steht hier in Anführungszeichen, da man im Wesentlichen die gleiche Rechnung wie bei der direkten Methode aus Abschnitt 1 machen muss (vergleiche die Rechnungen aus Beispiel 4 mit denen aus Beispiel refex:2 und Beispiel 3).

Das LGS hat keine Lösung und damit liegt der Aufpunkt von $\mathfrak{g}$ nicht auf $\mathcal{E}$. Damit ist $\mathfrak{g}$ echt parallel zu $\mathcal{E}$.

- In Beispiel 2 ist der Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Vielfaches des einen Richtungsvektors $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\mathcal{E}$:

$$u = -2 \cdot \vec{w}\,.$$

Jetzt überprüfen wir noch ob der Aufpunkt von $\mathfrak{g}$ in der Ebene $\mathcal{E}$ liegt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\iff & \left\{ \begin{aligned} -t + 4s &= 2 \\ -t - 2s &= -4 \\ -t + s &= -1 \end{aligned} \right\} \qquad \Big| \mathit{II} - \mathit{I} \text{ und } \mathit{III} - \mathit{I} \\
\iff & \left\{ \begin{aligned} -t + 4s &= 2 \\ -6s &= -6 \\ -3s &= -3 \end{aligned} \right\} \qquad \Big| \mathit{II} - 2 \cdot \mathit{III} \\
\iff & \left\{ \begin{aligned} 2t + 2s &= 2 \\ -6s &= -6 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

Dieses LGS hat die Lösung $s = 1$ und $t = 2$. Damit liegt der Aufpunkt von $\mathfrak{g}$ in der Ebene $\mathcal{E}$ und deshalb auch die gesamte Gerade $\mathfrak{g}$.