Frank Klinker

Grundlagen der analytischen Geometrie

Teil 6: Winkelberechnung mit Skalarprodukt und Kreuzprodukt

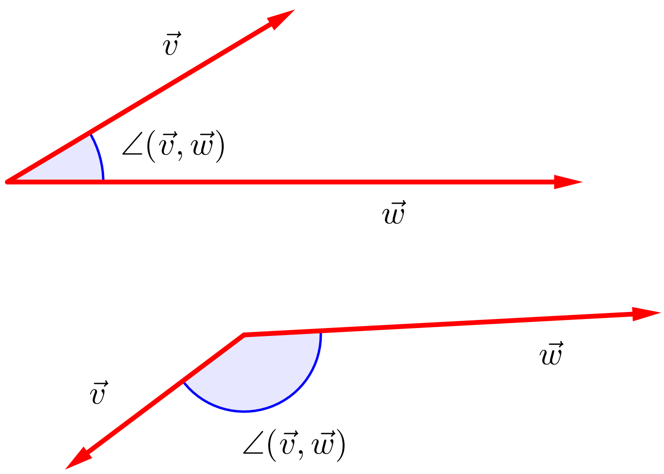
1 Der Winkel und spezielle Flächen

1.1 Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Mit Hilfe zweier Vektoren ist eine Ebene bestimmt. Damit macht es Sinn, den Winkel zwischen zwei Vektoren innerhalb dieser Ebene zu messen und anzugeben.

Wir schreiben $\angle(\vec{v}, \vec{w})$ für den Winkel, den wir zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ messen und der zwischen $0°$ und $180°$ liegt. Man spricht hier auch von einem *ungerichteten Winkel*, da es egal ist, ob wir diesen Winkel mit oder gegen den Uhrzeigersinn messen.

Abbildung 1: Die Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$



Unser Ziel ist es im Folgenden, diesen Winkel nur aus der Kenntnis der beiden Vektoren zu bestimmen.

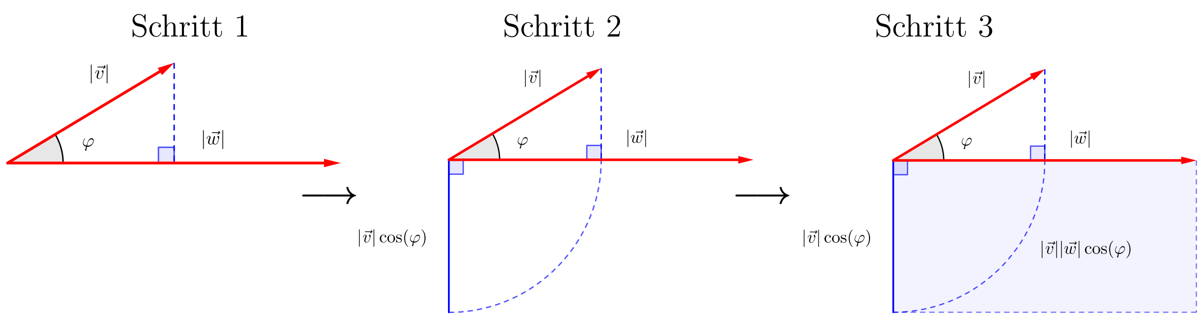
Um diesem Ziel näher zu kommen, sehen wir uns zuñachst spezielle Vierecke an, die man mit Hilfe zweier Vektoren konstruieren kann, und berechnen deren Flächeninhalte.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 18. Oktober 2023

1.2 Zwei spezielle Rechtecke

Zu zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ lassen sich zwei Rechtecke konstruieren. Die Abb. 2 zeigt die Konstruktion ausgehend von $\vec{v}$:

Abbildung 2: Die Konstruktion des Rechtecks



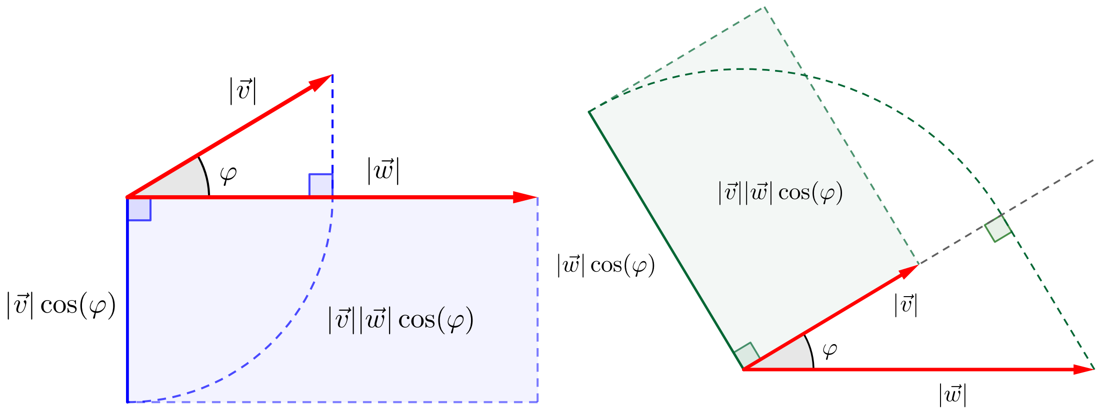
Schritt 1: Projiziere den Vektor $\vec{v}$ senkrecht auf die Richtung des Vektors $\vec{w}$

Schritt 2: Drehe die so erhaltene Strecke der Länge $|\vec{v}|\cos(\varphi)$ um 90°

Schritt 3: Zeichne das Rechteck, dass aus dieser Strecke und den Vektor $\vec{w}$ gebildet wird.

In Abb. 3 sind die Konstruktion ausgehend von $\vec{v}$ bzw. $\vec{w}$ nebeneinandergestellt.

Abbildung 3: Der Flächeninhalt der Rechtecke



Der Flächeninhalt der erhaltenen Rechtecke ist in beiden Fällen gleich, nämlich[1]

$$A_{\text{Rechteck}} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot |\cos(\varphi)|\,.$$

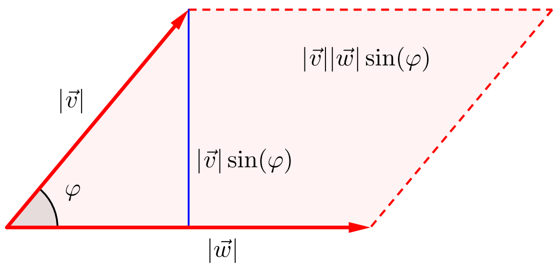
[1] Wir setzen hier den Betrag um den Kosinus, weil dieser für Winkel zwischen 90° und 180° negativ ist.

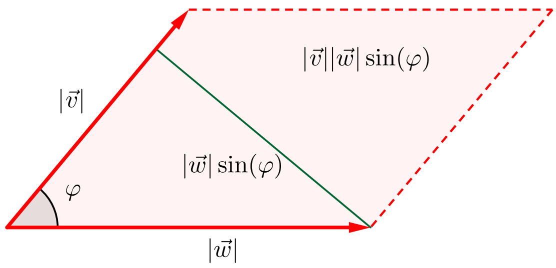
1.3 Ein spezielles Parallelogramm

Wie wir bereits bei der Addition von Vektoren gesehen haben, gibt es ein spezielles Parallelogramm, dass aus den beiden Vektoren aufgespannt wird.

Dessen Flächeninhalt erhalten wir, indem wir einen Vektor als Grundseite betrachten und die Höhe des Parallelogramms bezüglich dieser Grundseite bestimmen. In Abb. 4 sind die beiden Varianten skizziert.

Abbildung 4: Der Flächeninhalt des Parallelogramms





Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist dann

$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{v}||\vec{w}|\sin(\varphi)\,.$$

Schaffen wir es nun, den Flächeninhalt der Rechtecke oder den Flächeninhalt des Parallelogramms mit Hilfe der beteiligten Vektoren zu berechnen, dann können wir den Winkel zwischen den Vektoren berechnen:

$$|\cos(\varphi)| = \frac{A_{\text{Rechteck}}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\,, \qquad \sin(\varphi) = \frac{A_{\text{Parallelogramm}}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\,,$$

2 Das Skalarprodukt zweier Vektoren

Das **Skalarprodukt** zwischen zwei Vektoren ist eine neue Art Vektoren miteinander zu verknüpfen. Das Ergebnis ist eine Zahl.

Die Definition dieses Produktes ist denkbar einfach: Wir multiplizieren jeweils die x-Komponenten, die y-Komponenten und die z-Komponenten miteinander und addieren alle drei Ergebnisse.

Für die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ gibt das

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}$$

Beispiel 1. 1. $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot (-4) = -2 + 36 - 16 = 18$

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 5 = -4 + 6 - 20 = -18$

3. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 3 + 1 - 4 = 0$

Für das Rechnen mit dem Skalarprodukt gelten naheliegende **Rechenregeln**:

1. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
2. $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$
3. $a(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (a\vec{v}) \cdot \vec{w} = v \cdot (a\vec{w})$

Wegen $\vec{v} \cdot \vec{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^3$ hängt das Skalarprodukt mit dem Betrag zusammen:

4. $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ bzw. $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

Diese Rechenregeln kann man durch einfache direkte Rechnungen überprüfen.

Der folgende Zusammenhang ist nicht so klar ersichtlich aber sehr wichtig. Die Begründung dafür gibt es in Abschnitt 6.1.

Bemerkung 2. Das Skalarprodukt und die Fläche der Rechtecke hängen gemäß

$$A_{\text{Rechteck}} = |\vec{v} \cdot \vec{w}|$$

unmittelbar zusammen. Genauer gilt sogar (ohne die Beträge)

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{w})\big)$$

Damit haben wir

$$\boxed{\angle(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right)}$$

Eine wichtige geometrische Folgerung ist:

$$\boxed{\vec{v} \text{ und } \vec{w} \text{ stehen senkrecht zueinander, wenn } \vec{v} \cdot \vec{w} = 0}$$

Beispiel 3. 1. Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist $\vec{v} \cdot \vec{w} = 18$. Mit $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{26}$ und $|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + 12^2 + 4^2} = \sqrt{164}$ ergibt sich

$$\cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{w})\big) = \frac{18}{\sqrt{26}\sqrt{164}} \approx 0{,}276 \quad \text{also} \quad \angle(\vec{v}, \vec{w}) \approx 74^\circ$$

2. Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist $\vec{v} \cdot \vec{w} = -18$. Mit $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24}$ und $|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{38}$ erhalten wir

$$\cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{w})\big) = \frac{-18}{\sqrt{38}\sqrt{24}} \approx -0{,}596 \quad \text{also} \quad \angle(\vec{v}, \vec{w}) \approx 126{,}6^\circ$$

3. Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Damit sind die Vektoren senkrecht zueinander. Das ergibt sich auch aus dem Winkel:

$$\cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{w})\big) = 0 \quad \text{also} \quad \angle(\vec{v}, \vec{w}) = 90^\circ$$

3 Das Kreuzprodukt zweier Vektoren

Das **Kreuzprodukt** zwischen zwei Vektoren ist eine weitere Art Vektoren miteinander zu verknüpfen. Das Ergebnis ist hier jedoch ein neuer Vektor.

Die Definition dieses Produktes ist nicht ganz so einfach. Für die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ ist das Kreuzprodukt wie folgt definiert

$$\boxed{\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}}$$

Beispiel 4. 1. $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-4) - 4 \cdot 12 \\ 4 \cdot 2 - (-1) \cdot (-4) \\ (-1) \cdot 12 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ 4 \\ -18 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - (-4) \cdot 3 \\ (-4) \cdot (-2) - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

Für das Rechnen mit dem Skalarprodukt gelten folgende **Rechenregeln**:

1. $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$
2. $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$
3. $a(\vec{v} \times \vec{w}) = (a\vec{v}) \times \vec{w} = v \times (a\vec{w})$

Diese Rechenregeln kann man durch direkte Rechnungen überprüfen. Sie werden durch folgende sehr wichtige geometrische Eigenschaft ergänzt, die man ebenfalls durch eine direkte Rechnung nachprüfen kann:

Bemerkung 5. Mit dem Kreuzprodukt bekommt man auf einfache Weise einen zu beiden Vektoren senkrechten Vektor:

Der Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ steht senkrecht auf den Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$,
d. h. es gilt $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ und $\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$

Beispiel 6. 1. Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} -60 \\ 4 \\ -18 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ 4 \\ -18 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ 4 \\ -18 \end{pmatrix} = 0$$

2. Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 22 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$. Es ist

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$$

3. Mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$. Das gibt

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

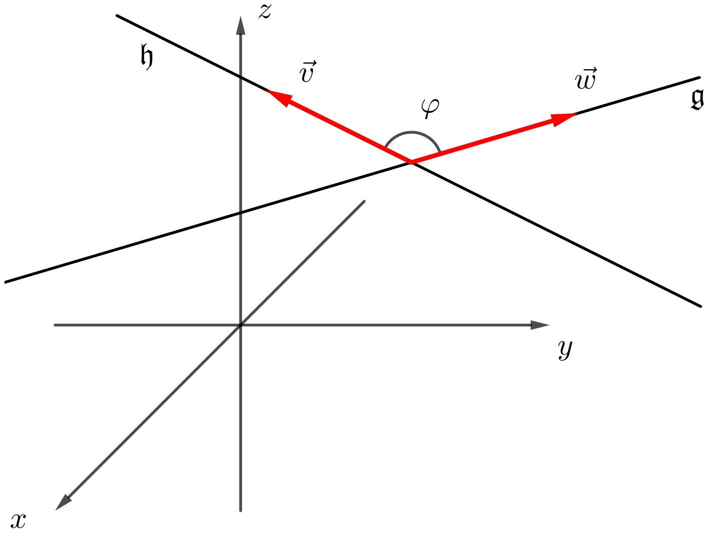
4 Normalenvektor und Schnittwinkel

Bemerkung 7. Mit Hilfe des Kreuzproduktes lässt sich sehr einfach ein Vektor finden, der senkrecht auf einer gegebenen Ebene steht:
Ist die Ebene in Parameterform $\vec{x}(s,t) = \vec{a} + s\vec{v} + t\vec{w}$ gegeben, dann steht $\vec{v} \times \vec{w}$ senkrecht auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$ und damit auf der gesamten Ebene.
Einen solchen senkrechten Vektor nennen wir auch einen **Normalenvektor** der Ebene.

Bemerkung 8.

1. Der Schnittwinkel φ zweier Geraden $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ der beiden Geraden. Diesen erhalten wir mit Hilfe des Skalarproduktes, siehe Abbildung 5.

Abbildung 5: Der Schnittwinkel zwischen zwei Geraden



$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|}\right)$$

2. Der Schnittwinkel zwischen einer Geraden $\mathfrak{g}$ und einer Ebene $\mathcal{E}$ bestimmen wir über einen Umweg: Wir berechnen zuerst einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und dann den Winkel ψ zwischen $\vec{n}$ und dem Richtungsvektor der Geraden. Daraus ergibt sich der Schnittwinkel φ als $90° - \psi$ oder $\psi - 90°$, je nach dem, ob $\vec{n}$ und $\vec{v}$ auf der gleichen Seite von $\mathcal{E}$ liegen oder nicht, siehe Abbildung 6.

Im Gegensatz zu seinem Gegenpart im Zusammenhang mit dem Skalarprodukt, ist die folgende Eigenschaft nicht so wichtig aber dennoch interessant. Die Begründung dafür gibt es in Abschnitt 6.2.

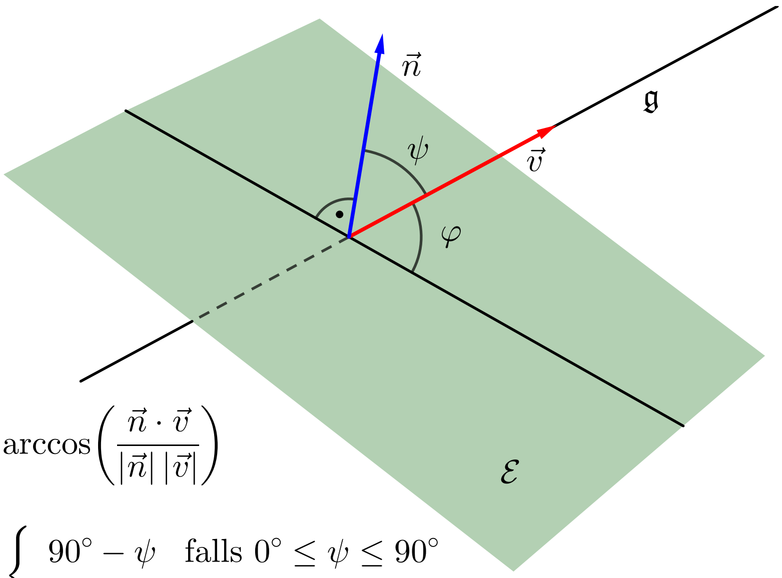
Bemerkung 9. Das Kreuzprodukt und die Fläche des Parallelogramms hängen gemäß

$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{v} \times \vec{w}|$$

unmittelbar zusammen. Es gilt also

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}|\left|\sin\left(\angle(\vec{v}, \vec{w})\right)\right|$$

Abbildung 6: Der Schnittwinkel zwischen einer Geraden und einer Ebene



$$\psi = \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{|\vec{n}|\,|\vec{v}|}\right)$$

$$\varphi = \begin{cases} 90^\circ - \psi & \text{falls } 0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ \\ \psi - 90^\circ & \text{falls } 90^\circ < \psi < 180^\circ \end{cases}$$

Achtung. Auch wenn die Formel aus Bemerkung 9 zur Berechnung der Parallelogrammfläche genutzt werden kann, ist sie nicht gut geeignet zur Berechnung des Winkels:

- Einerseits benötigt man für das Kreuzprodukt im Gegensatz zum Skalarprodukt eine komplizierte Rechnung.
- Andererseits liefert der arcsin wegen des Betrags immer einen Winkel zwischen 0° und 90°, wenn man die obige Formel auflöst. Das ist der spitze Winkel im Parallelogramm. Das muss aber nicht unbedingt der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sein, sondern gegebenenfalls der Ergänzungswinkel zu 180°.

  Ob man jetzt den korrekten Winkel berechnet hat, kann man ohne weitere Untersuchungen nicht erkennen!

$$\boxed{\textbf{DESHALB:}\ \text{Zur Winkelberechnung nehmen wir das Skalarprodukt!}}$$

5 Basisaufgaben zum Skalarprodukt und Kreuzprodukt

Aufgabe 10. Die zwei Geraden

$$\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \quad \mathfrak{h} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

schneiden sich im Punkt $S(-3/3/-3)$. Wie groß ist der Schnittwinkel.

Der Schnittwinkel ist der Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren. Es ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} &= 4 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 8 + 2 + 6 = 16 \\ \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| &= \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{21} \\ \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

Damit ist der Schnittwinkel

$$\varphi = \arccos \left(\frac{18}{\sqrt{21}\sqrt{17}} \right) \approx 17{,}7^\circ \, .$$

Aufgabe 11. Bestimmen Sie den Parameter a so, dass $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -2a \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2a \\ a \end{pmatrix}$ senkrecht zueinander stehen.

Wir müssen die a finden, für die $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ ist. Es ist

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2a + (-2a) \cdot a = -2a^2 + 6a - 4 \stackrel{!}{=} 0$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$a = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Aufgabe 12. Bestimme einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene

$$\mathcal{E} : \vec{x}(s,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

steht, also einen Normalenvektor der Ebene.

Den gesuchten Vektor erhält man aus dem Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren der Ebene:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot (-2) - 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13. Bestimme den Winkel unter dem die Gerade

$$\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

die Ebene

$$\mathcal{E} : \vec{x}(s,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

schneidet.

Wir berechnen den Winkel zwischen dem Richtungsvektor $\vec{v}$ von $\mathfrak{g}$ und einem Normalenvektor $\vec{n}$ von $\mathcal{E}$. Letzteren erhalten wir mit dem Kreuzprodukt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 1 - 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{n} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-9) + 8 \cdot (-5) = -50 \,, \\ |\vec{v}| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 8^2} = \sqrt{66} \,, \\ |\vec{n}| &= \sqrt{1^2 + (-9)^2 + (-5)^2} = \sqrt{106} \,, \end{aligned}$$

sodass

$$\psi = \arccos\left(\frac{-50}{\sqrt{66}\sqrt{106}} \right) \approx 126,7^\circ \,.$$

Damit ist der Schnittwinkel zwischen der Geraden und der Ebene

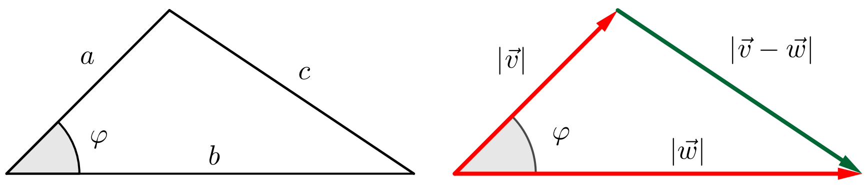
$$\varphi = \psi - 90^\circ \approx 36{,}7^\circ \,.$$

6 Die Begründungen für die Flächenformeln

6.1 Die Begründung für $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{w})\big)$

Die Formel folgt aus dem Kosinussatz für Dreiecke, siehe Abb. 7.

Abbildung 7: Der Kosinussatz



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi) \qquad |\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{w}|\cos(\varphi)$$

Mit Hilfe der Rechenregeln für das Skalarprodukt berechnen wir

$$\begin{aligned} |\vec{v} - \vec{w}|^2 &= (\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w} \\ &= |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2\,\vec{v} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

Das setzen wir in die Formel für den Kosinussatz ein ($\varphi = \angle(\vec{v}, \vec{w})$):

$$\begin{aligned} |\vec{v} - \vec{w}|^2 &= |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{w}|\cos(\varphi) && \\ |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2\,\vec{v} \cdot \vec{w} &= |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{w}|\cos(\varphi) && \Big|\; - |\vec{v}|^2 - |\vec{w}|^2 \\ -2\,\vec{v} \cdot \vec{w} &= -2|\vec{v}||\vec{w}|\cos(\varphi) && \Big|\; : (-2) \\ \vec{v} \cdot \vec{w} &= -|\vec{v}||\vec{w}|\cos(\varphi) && \end{aligned}$$

6.2 Die Begründung für $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}| \sin\big(\angle(\vec{v}, \vec{w})\big)$

Statt der eigentlichen Aussage überprüfen wir die Gültigkeit der quadrierten Gleichung:

$$|\vec{v} \times \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2 \sin\big(\angle(\vec{v}, \vec{w})\big)^2$$

Wegen des trigonometrischen Phythagoras $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$ ist das gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} |\vec{v} \times \vec{w}|^2 &= |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2\Big(1 - \cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{w})\big)^2\Big) \\ |\vec{v} \times \vec{w}|^2 &= |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2 - |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2 \cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{w})\big)^2 \\ |\vec{v} \times \vec{w}|^2 &= |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2 - |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2 \cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{w})\big)^2 \\ |\vec{v} \times \vec{w}|^2 &= |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2 - \Big(|\vec{v}||\vec{w}| \cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{w})\big)\Big)^2 \end{aligned}$$

Nutzen wir nun noch die Beziehung für das Skalarprodukt, dann ist die Gleichung, die wir eigentlich begründen wollen, gleichbedeutend mit

$$\boxed{|\vec{v} \times \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2}$$

oder

$$(\vec{v} \cdot \vec{w})^2 = |\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2 - |\vec{v} \times \vec{w}|^2 \,. \tag{$*$}$$

Wir beginnen mit der linken Seite von $(*)$:

$$\begin{aligned}(\vec{v} \cdot \vec{w})^2 &= (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 \\ &= (v_1 w_1)^2 + (v_2 w_2)^2 + (v_3 w_3)^2 + 2 v_1 w_1 v_2 w_2 + 2 v_1 w_1 v_3 w_3 + 2 v_2 w_2 v_3 w_3 \\ &= v_1^2 w_1^2 + v_2^2 w_2^2 + v_3^2 w_3^2 + 2 v_1 v_2 w_1 w_2 + 2 v_1 v_3 w_1 w_3 + 2 v_2 v_3 w_2 w_3 \,.\end{aligned}$$

Von der rechten Seite von $(*)$ berechnen wir zunächst $|\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2$:

$$\begin{aligned}|\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2 &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \\ &= v_1^2 (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) + v_2^2 (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) + v_3^2 (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \\ &= v_1^2 w_1^2 + v_2^2 w_2^2 + v_3^2 w_3^2 + v_1^2 w_2^2 + v_1^2 w_3^2 + v_2^2 w_1^2 + v_2^2 w_3^2 + v_3^2 w_1^2 + v_3^2 w_2^2 \,.\end{aligned}$$

Von der rechten Seite von $(*)$ berechnen als nächstes $|\vec{v} \times \vec{w}|^2$:

$$\begin{aligned}|\vec{v} \times \vec{w}|^2 &= (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_3 w_1 - v_1 w_3)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 \\ &= (v_2 w_3)^2 + (v_3 w_2)^2 - 2 v_2 w_3 v_3 w_2 + (v_3 w_1)^2 + (v_1 w_3)^2 - 2 v_3 w_1 v_1 w_3 \\ &\quad + (v_1 w_2)^2 + (v_2 w_1)^2 - 2 v_1 w_2 v_2 w_1 \\ &= v_2^2 w_3^2 + v_3^2 w_2^2 + v_3^2 w_1^2 + v_1^2 w_3^2 + v_1^2 w_2^2 + v_2^2 w_1^2 - 2 v_1 v_2 w_1 w_2 - 2 v_1 v_3 w_1 w_3 \\ &\quad - 2 v_2 v_3 w_2 w_3 \,.\end{aligned}$$

Die beiden letzten Ausdrücke ziehen wir voneinander ab und erhalten zusammen die rechte Seite von $(*)$:

$$\begin{aligned}&|\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2 - |\vec{v} \times \vec{w}|^2 \\ &= v_1^2 w_1^2 + v_2^2 w_2^2 + v_3^2 w_3^2 + \cancel{v_1^2 w_2^2} + \cancel{v_1^2 w_3^2} + \cancel{v_2^2 w_1^2} + \cancel{v_2^2 w_3^2} + \cancel{v_3^2 w_1^2} + \cancel{v_3^2 w_2^2} \\ &\quad - \Big(\cancel{v_2^2 w_3^2} + \cancel{v_3^2 w_2^2} + \cancel{v_3^2 w_1^2} + \cancel{v_1^2 w_3^2} + \cancel{v_1^2 w_2^2} + \cancel{v_2^2 w_1^2} - 2 v_1 v_2 w_1 w_2 \\ &\qquad - 2 v_1 v_3 w_1 w_3 - 2 v_2 v_3 w_2 w_3 \Big) \\ &\quad = v_1^2 w_1^2 + v_2^2 w_2^2 + v_3^2 w_3^2 + 2 v_1 v_2 w_1 w_2 + 2 v_1 v_3 w_1 w_3 + 2 v_2 v_3 w_2 w_3 \,.\end{aligned}$$

Vergleichen wir das mit dem Ergebnis der linken Seite, dann sehen wir, dass beide Ausdrücke übereinstimmen.

Somit ist die Gültigkeit von von $(*)$ gezeigt. Damit ist aber auch die gerahmten Formel sowie die Ausgangsformel korrekt.