Frank Klinker

Grundlagen der analytischen Geometrie

Teil 6.0: Orthogonalität, Normalenvektor und Koordinatenform

1 Das Skalarprodukt und ein "Senkrecht-Test"

1.1 Das Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zwischen zwei Vektoren ist eine neue Art Vektoren miteinander zu verknüpfen. Das Ergebnis ist eine Zahl.

Die Definition dieses Produktes ist denkbar einfach: Wir multiplizieren jeweils die x-Komponenten, die y-Komponenten und die z-Komponenten miteinander und addieren alle drei Ergebnisse.

Für die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ gibt das

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}$$

Beispiel 1. 1. $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot (-4) = -2 + 36 - 16 = 18$

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 5 = -4 + 6 - 20 = -18$

3. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 3 + 1 - 4 = 0$

1.2 Rechenregeln für das Skalarprodukt

Für das Rechnen mit dem Skalarprodukt gelten naheliegende **Rechenregeln**:

1. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 3. Dezember 2024

2. $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$
3. $a(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (a\vec{v}) \cdot \vec{w} = v \cdot (a\vec{w})$

Wegen $\vec{v} \cdot \vec{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^3$ hängt das Skalarprodukt mit dem Betrag zusammen:

4. $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 \quad \text{bzw.} \quad |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

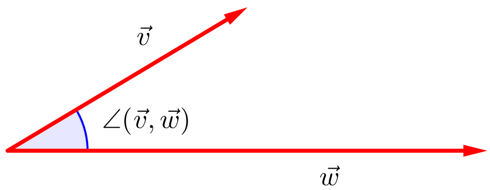
Diese Rechenregeln kann man durch einfache direkte Rechnungen überprüfen.

Der folgende Zusammenhang ist nicht so klar ersichtlich aber sehr wichtig. Die Begründung dafür gibt es in Abschnitt **??**.

1.3 Der "Senkrecht-Test"

Das Skalarprodukt hängt eng mit dem Winkel zwischen zwei Vektoren zusammen, siehe Abbildung 1. Die genauere Untersuchung davon wollen wir allerdings auf später

Abbildung 1: Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$



verschieben.

Was wir hier jedoch verwenden wollen, ist die Untersuchung, ob zwei Vektoren senkrecht zueinander stehen:

Der "Senkrecht-Test"

$\vec{v}$ und $\vec{w}$ stehen genau dann senkrecht zueinander, wenn $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

Beispiel 2. Die zwei Vektoren aus Beispiel 1.3 stehen senkrecht zueinander.

2 Das Kreuzprodukt und ein Normalenvektor

2.1 Das Kreuzprodukt

Das **Kreuzprodukt** zwischen zwei Vektoren ist eine weitere Art Vektoren miteinander zu verknüpfen. Das Ergebnis istein neuer Vektor.

Die Definition dieses Produktes ist nicht ganz so einfach. Für die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ ist das Kreuzprodukt wie folgt definiert

$$\boxed{\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}}$$

Beispiel 3. 1. $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-4) - 4 \cdot 12 \\ 4 \cdot 2 - (-1) \cdot (-4) \\ (-1) \cdot 12 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ 4 \\ -18 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - (-4) \cdot 3 \\ (-4) \cdot (-2) - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.2 Rechenregeln für das Kreuzprodukt

Für das Rechnen mit dem Kreuzprodukt gelten folgende **Rechenregeln**:

1. $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$
2. $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$
3. $a(\vec{v} \times \vec{w}) = (a\vec{v}) \times \vec{w} = v \times (a\vec{w})$

Diese Rechenregeln kann man durch direkte Rechnungen überprüfen.

2.3 Ein Normalenvektor

Die obigen Rechenregeln werden durch folgende, sehr wichtige geometrische Eigenschaft ergänzt, die man ebenfalls durch eine direkte Rechnung nachprüfen kann:

Bemerkung 4. Mit dem Kreuzprodukt erhalten wir auf einfache Weise einen zu beiden Vektoren senkrechten Vektor:

> Der Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ steht senkrecht auf den Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$,
> d. h. es gilt $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ und $\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$

Beispiel 5.

1. Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} -60 \\ 4 \\ -18 \end{pmatrix}$. Es gilt

   $$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ 4 \\ -18 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ 4 \\ -18 \end{pmatrix} = 0.$$

2. Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$. Das gibt

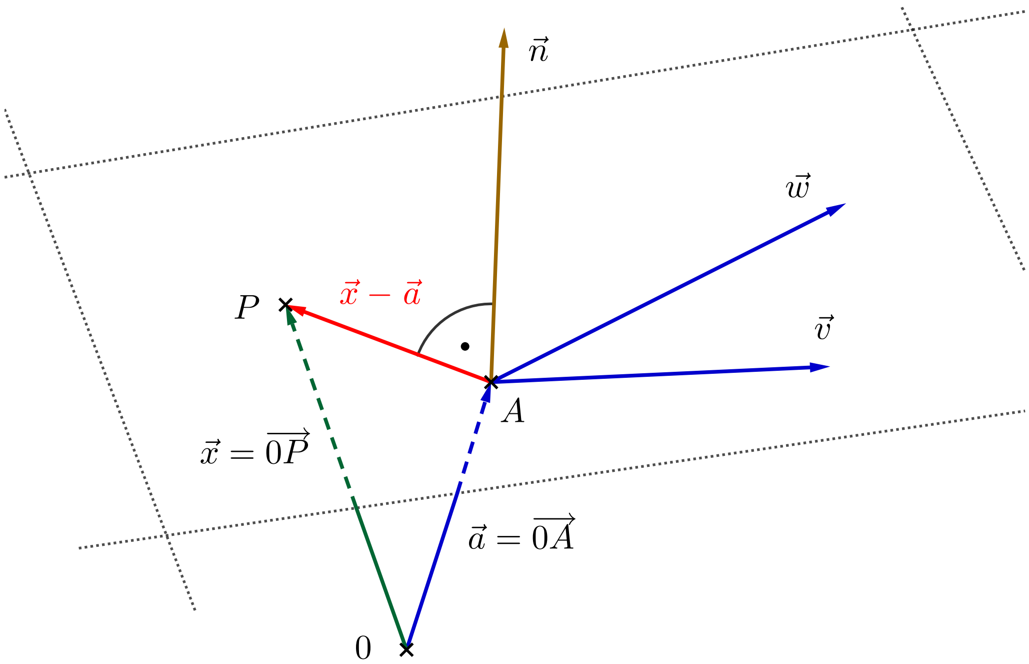
   $$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

3 Die Koordinatenform einer Ebene

Zur Herleitung der Koordinatenform einer Ebene sehen wir uns die Abbildung 2 an. Hierin nutzen wir die folgenden Bezeichnungen:

- A: Aufpunkt der Ebene mit Ortsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{0A}$
- $\vec{v}$ und $\vec{w}$: Richtungsvektoren der Ebene
- $\vec{n}$: Normalenvektor der Ebene (z. B. $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$)
- P: ein weiterer (beliebiger) Punkt der Ebene mit Ortsvektor $\vec{x} = \overrightarrow{0P}$
- $\vec{x} - \vec{a}$: Vektor von A nach P innerhalb der Ebene

Abbildung 2: Skizze zur Normalform einer Ebene



Sind bei einer Ebene ein Aufpunktvektor $\vec{a}$ und ein Normalenvektor $\vec{n}$ gegeben und ist P ein weiterer Punkt mit Ortsvektor $\vec{x} = \overrightarrow{0P}$, dann ist $\vec{x} - \vec{a}$ senkrecht zu $\vec{n}$.

Ist umgekehrt $\vec{x}$ ein Ortsvektor und steht $\vec{x} - \vec{a}$ senkrecht auf $\vec{n}$, dann liegt der zu $\vec{x}$ gehörige Endpunkt auf der Ebene.

Das heißt, dass alle Punkte der Ebene sich genau durch die Gleichung

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}$$

berechnen lassen, oder

Schreiben wir den Normalenvektor in der Form $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und den Aufpunkt als $(p_1/p_2/p_3)$ sowie $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\begin{aligned} & \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a} \\ \iff & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ \iff & ax + by + cz = ap_1 + bp_2 + cp_3 \end{aligned}$$

Wir kürzen die rechte Seite ab und schreiben dafür $d = ap_1 + bp_2 + cp_3$. Dann haben wir die

Koordinatenform einer Ebene

sind a, b, c und d Zahlen, dann liegen alle Punkte $(x/y/z)$ mit

$$\boxed{ax + by + cz = d}$$

auf einer Ebene.

- Ein Normalenvektor dieser Ebene ist durch $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ gegeben.
- Spezielle Punkte der Ebene erhält man z. B. als $\left(\frac{d}{a}/0/0\right)$, $\left(0/\frac{d}{b}/0\right)$ oder $\left(0/0/\frac{d}{c}\right)$

  Achtung: Den jeweiligen Punkt gibt es nur, wenn a, b oder c nicht Null sind. Dann sind das genau die Durchstoßpunkte der Koordinatenachsen durch die Ebene!

Bemerkung 6. 1. Die Koordinatenform einer Ebene ist nicht eindeutig, da man bei ihrer Berechnung den Aufpunkt beliebig wählen kann und den Normalenvektor mit einer beliebigen Zahl (außer Null!) multiplizieren kann.

2. Die Mehrdeutigkeit der Koordinatenform einer Ebene ist darauf beschränkt, dass man die gesamte Gleichung mit einer festen Zahl multiplizieren kann.

3. Mit der Koordinatendarstellung lassen sich sehr einfach die Durchstoßpunkte der Koordinatenachsen bestimmen, siehe oben.

4. Die Koordinatenform ist wesentlich kompakter, als die Parameterform einer Ebene.

5. Mit Hilfe der Koordinatendarstellung einer Ebene lässt ich denkbar einfach prüfen, ob ein Punkt auf dieser Ebene liegt.

   Dazu muss man die Koordinaten des Punktes lediglich in die Gleichung einsetzen und prüfen, ob diese dann wahr ist.

6. Mit Hilfe der Koordinatendarstellung einer Ebene lässt sich einfacher der Schnittpunkt mit einer Geraden bestimmen.

   Dazu muss man die Komponenten der Parameterform der Geraden lediglich in die Koordinatenform der Ebene einsetzen. Man erhält so eine lineare Gleichung für den Parameter der Geraden. Deren Lösung gibt dann den Schnittpunkt.

7. Mit Hilfe der Koordinatenform lässt sich einfacher als mit der Parameterform die Lagebeziehung zweier Ebenen bestimmen:

   - Sind die Normalenvektoren beider Ebenen Vielfache voneinander, dann sind die Ebenen parallel.
     Sie sind dann sogar identisch, wenn sie einen Punkt (und damit alle) gemeinsam haben.
   - Sind die Normalenvektoren keine Vielfache voneinander, dann schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden (welche das ist, dass muss man dann weiter untersuchen)

Beispiel 7. a) Der Punkt $A = (1/3/4)$ liegt nicht auf der Ebene $\mathcal{E}:\ 2x-y+2z = 3$, denn es ist $2 \cdot 1 - 3 + 2 \cdot 4 = 7 \neq 3$.

Aber der Punkt $B(0/2/2{,}5)$ liegt auf $\mathcal{E}$, denn $2 \cdot 0 - 2 + 2 \cdot 2{,}5 = 3$.

b) Die Ebene $\mathcal{E}:\ 2x - y + 2z = 5$ und die Gerade $\mathfrak{g}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ schneiden sich in einem Punkt: Einsetzen der Komponenten von $\vec{x}(t)$ in $\mathcal{E}$ gibt $2(-4-t) - (-2+3t) + 2(1-2t) = 5 \iff t = -1$. Setzen wir das in die Geradengleichung ein, dann erhalten wir den Schnittpunkt $S(-3/-5/3)$.

c) Die Ebenen $\mathcal{E}_1:\ 2x - y + 2z = 3$ und $\mathcal{E}_2:\ -x + 0{,}5y - z = 2$ sind parallel, denn für die Normalenvektoren gilt $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Wir testen, ob der Punkt $(1{,}5/0/0)$ von $\mathcal{E}_1$ auf $\mathcal{E}_2$ liegt: $-1{,}5 + 0{,}5 \cdot 0 - 0 = 1{,}5 \neq 2$. Der Punkt liegt also nicht auf $\mathcal{E}_2$ und damit auch kein anderer Punkt.

Die Ebenen sind somit echt parallel.

3.1 Von der Parameterform zur Koordinatenform

Wir starten mit einer Parameterform $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v} + s\vec{w}$. Mit Hilfe der Richtungsvektoren berechnen wir einen Normalenvektor, nämlich $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$. Das liefert uns mit der Berechnung von $= \vec{n} \cdot \vec{a}$ die Koordinatenform.

Beispiel 8. a) Gegeben ist die Parameterform $\vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten einen Normalenvektor indem wir das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren berechnen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 1 \\ (-4) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-3) - (-4) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dazu brauchen wir damit noch

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-1) + (-5) \cdot 2 + 5 \cdot 1 = -20\,.$$

Zusammen gibt das die Koordinatenform

$$5x - 5y + 5z = -10\,.$$

b) Gegeben ist die Parameterform $\vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und wir berechnen einen Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 0 - (-4) \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Dazu berechnen wir wieder

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + (-10) \cdot 3 = -30$$

und erhalten die Koordinatenform

$$-10z = -30\,.$$

c) Die Parameterform $\vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ soll in die Koordinatenform überführt werden. Wir berechnen einen Normalenvektor mit Hilfe des Kreuzproduktes der zwei Richtungsvektoren:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Damit lautet die linke Seite der Koordinatendarstellung $-8x - 7y + 3z$. Die rechte Seite bekommen wir, indem wir hier den Aufpunkt einsetzen, also $d = -8 \cdot 4 - 7 \cdot 7 - 3 \cdot (-3) = -32 - 49 - 9 = -90$. Zusammen also

$$-8x - 7y + 3z = -90\,.$$

3.2 Von der Koordinatenform zur Parameterform

Von der Koordinatenform zur Parameterform gelangt man recht einfach.

Wir suchen uns sich in der Koordinatenform $ax + by + cz = d$ eine der drei Koordinaten heraus, nach der wir die Gleichung auflösen, z. B. z: $z = \frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y$. Dann nutzen wir die Vektorschreibweise, schreiben wir t, s statt x, y und setzen die soeben erhaltene Gleichung ein:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ \frac{d}{c} - \frac{a}{c}t - \frac{b}{c}s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d}{c} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix}$$

Wie wir in den folgenden Beispielen sehen, erhält man auf diese Art Parameterdarstellungen mit einfachen Darstellungen, d. h mit vielen Nullen.

Beispiel 9. a) Gegeben ist die Koordinatenform $4x - 2y + 3z = 12$ und wir lösen nach y auf: $y = -6 + 2x + 1{,}5z$. Das gibt dann die Parameterform (t, s statt x, z):

$$x(t,s) = \begin{pmatrix} t \\ -6 + 2t + 1{,}5s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

b) Gegeben ist die Parameterform $5x + 10y = 20$ und wir lösen nach x auf: $x = 4 - 2y$. Das gibt dann die Parameterform (t, s statt y, z):

$$x(t,s) = \begin{pmatrix} 4 - 2t \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

c) Gegeben ist die Parameterform $3x - 7y - 3x = 5$ und wir lösen nach z auf: $z = -\frac{5}{3} + x - \frac{7}{3}y$. Das gibt dann die Parameterform (t, s statt x, y):

$$x(t,s) = \begin{pmatrix} t \\ s \\ -\frac{5}{3} + t - \frac{7}{3}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix} .$$