Frank Klinker

Grundlagen der analytischen Geometrie

Teil 8: Die Schnitte Ebene/Gerade und Ebene/Ebene bei unterschiedlichen Darstellungen

1 Die Ebene liegt in Koordinatenform vor und die Gerade in Parameterform

Will man die gegenseitige Lage einer Gerade und einer Ebene bestimmen, wenn beide in Parameterform vorliegen, dann haben wir gelernt, dass dazu ein lineares Gleichungssystem der Größe 3×3 zu lösen ist.

Wenn die Ebene jedoch in Koordinatenform gegeben ist, dann reduziert sich das Problem auf die Untersuchung einer einzigen linearen Gleichung.

Wir können also mit einer einfachen Rechnung überprüfen, ob es einen Schnittpunkt gibt, ob die beiden echt parallel sind oder die Gerade in der Ebene liegt. Im Fall, dass ein Schnittpunkt existiert, können wir diesen auch berechnen.

Das Vorgehen ist das Folgende:

1. Setze die Geradengleichung $\vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{v}$ komponentenweise in die Ebenengleichung $ax + by + cz = d$ ein. Das gibt uns eine lineare Gleichung mit der Variablen t.
2. Löse die Gleichung.

   Fall 1: Gibt es keine Lösung, dann sind Gerade und Ebene echt parallel.

   Fall 2: Gibt es unendlich viele Lösungen, so liegt die Gerade in der Ebene.

   Fall 3: Gibt es genau eine Lösung, dann schneiden sich Ebene und Gerade in einem Punkt.
3. Im Fall einer Lösung, setze diese in die Geradengleichung ein und berechne so den Schnittpunkt.

Beispiel 1. a) Die Ebene ist durch $2x - 5y + 3z = 2$ gegeben und die Gerade durch $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Einsetzen der Gerade liefert:

$$\begin{aligned} 2(3-t) - 5(-2+t) + 3(-3+4t) = 2 &\iff 6 - 2t + 10 - 5t - 9 + 12t = 2 \\ &\iff 7 + 5t = 2 \\ &\iff t = -1 \end{aligned}$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 30. Oktober 2023

Es gibt also genau eine Lösung (Fall 3). Setzen wir die in die Gerade ein, so gibt das

$$\vec{x}(-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

und wir haben als Schnittpunkt $S(4/-3/-7)$.

b) Die Ebene ist durch $2x - 10y + 3z = 4$ gegeben und die Gerade durch $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Einsetzen der Gerade liefert:

$$\begin{aligned} 2(1-t) - 10(0+t) + 3(2+4t) = 4 &\iff 2 - 2t - 10t + 6 + 12t = 4 \\ &\iff 0 = -4 \end{aligned}$$

Die Gleichung hat keine Lösung (Fall 1). also gibt es keinen Schnittpunkt und Gerade und Ebene sind echt parallel.

c) Die Ebene ist durch $2x - 10y + 3z = 4$ gegeben und die Gerade durch $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Einsetzen der Gerade liefert:

$$\begin{aligned} 2(-1-t) - 10(0+t) + 3(2+4t) = 4 &\iff -2 - 2t - 10t + 6 + 12t = 4 \\ &\iff 0 = 0 \end{aligned}$$

Damit sind alle Werte für t Lösungen (Fall 2) und die Gerade liegt ganz in der Ebene.

Bemerkung 2. Die Rechnung hier ist wesentlich weniger umfangreich, als die Rechnung mit der Parameterform der Ebene. Deshalb kann es eventuell sinnvoll sein, zunächst die Koordinatenform der Ebene zu berechnen, falls dies in Parameterform vorliegt.

2 Eine Ebene liegt in Koordinatenform vor und die zweite in Parameterform

Das Vorgehen ist hier im Wesentlichen identisch zu dem aus dem vorigen Abschnitt: Wir setzen die Parameterform in die Koordinatenform ein. Also:

1. Setze die Geradengleichung $\vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{v} + s\vec{w}$ komponentenweise in die Ebenengleichung $ax + by + cz = d$ ein. Das gibt uns eine lineare Gleichung mit der Variablen t und s.

2. Vereinfache die Gleichung so weit wie möglich

   Fall 1: Ist diese vereinfachte Gleichung nicht lösbar, dann sind die Ebenen echt parallel.

Fall 2: Ist diese vereinfachte Gleichung für alle Werte s und t lösbar, so sind die Ebenen identisch.

Fall 3: Lässt sich die Gleichung nach s oder t auflösen, dann schneiden sich die Ebenen in einer Gerade.

3. Im letzten Fall, setze die aufgelöste Gleichung in die Parameterform der einen Ebene ein und vereinfache. Das gibt dann die Parameterform der Schnittgeraden.

Beispiel 3. a) Die Koordinatendarstellung der ersten Ebene ist $3x-2y+4z=-2$ und die Parameterdarstellung der zweiten ist $\vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\3\\-6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned}
& 3(-1-4t+s)-2(3t)+4(2-6t+s)=-2 \\
\iff & -3-12t+3s-6t+8-24t+4s=-2 \\
\iff & -42t+7s=-7 \\
\iff & s=6t-1
\end{aligned}$$

Wir sind in Fall 3. Die Schnittgerade erhalten wir durch einsetzen in die Parameterform:

$$\begin{aligned}
& \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\3\\-6\end{pmatrix} + (6t-1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \\
\iff & \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\3\\-6\end{pmatrix} + 6t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \\
\iff & \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\3\\-6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix} \\
\iff & \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}-1-1\\0-0\\2-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4+6\\3+0\\-6+6\end{pmatrix} \\
\iff & \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Die Koordinatendarstellung der ersten Ebene ist $3x-2y-3z=-2$ und die Parameterdarstellung der zweiten ist $\vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\3\\-6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Wir setzen ein:

$$3(-1-4t+s)-2(3t)-3(2-6t+s)=-2$$

$$\begin{aligned}
&\iff -3 - 12t + 3s - 6t - 6 + 18t - 3s = -2 \\
&\iff 0 = 7
\end{aligned}$$

Das ist Fall 1, wo es keine Lösung gibt: damit sind die Ebenen echt parallel.

c) Die Koordinatendarstellung der ersten Ebene ist $3x - 2y - 3z = -9$ und die Parameterdarstellung der zweiten ist $\vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned}
&3(-1 - 4t + s) - 2(3t) - 3(2 - 6t + s) = -9 \\
\iff & -3 - 12t + 3s - 6t - 6 + 18t - 3s = -9 \\
\iff & 0 = 0
\end{aligned}$$

Das ist Fall 2, wo alle Werte für s und t Lösungen sind. Damit sind die Ebenen identisch.

Bemerkung 4. Liegen beide Ebenen in Koordinatenform vor, dann wandeln wir eine der beiden zunächst in die Parameterform um.

Beispiel 5. Zwei Ebenen sind gegeben durch $2x - y + 4z = 1$ und $x + 2y - z = -2$. Wir wandeln die zweite in Parameterform um. Dazu lösen wir die Gleichung nach z auf ($z = x + 2y + 2$), ersetzen x, y durch t, s und schreiben das ganze komponentenweise:

$$\vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} t \\ s \\ t + 2s + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das setzen wir in die Koordinatendarstellung der ersten Ebene ein:

$$2(t) - (s) + 4(2 + t + 2s) = 1 \iff 6t + 7s + 8 = 1 \iff s = -\tfrac{6}{7}t - 1\,.$$

Wir sind in Fall 3. Das Ergebnis setzen wir in die Parameterform der zweiten Ebene ein:

$$\begin{aligned}
&\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \Big(-\tfrac{6}{7}t - 1\Big) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\iff &\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{6}{7}t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\iff &\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{7} \\ -\frac{12}{7} \end{pmatrix} \\
\iff &\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 1 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 - \frac{6}{7} \\ 1 - \frac{12}{7} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\iff \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

Das ist dann eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden.