Frank Klinker

Grundlagen der analytischen Geometrie

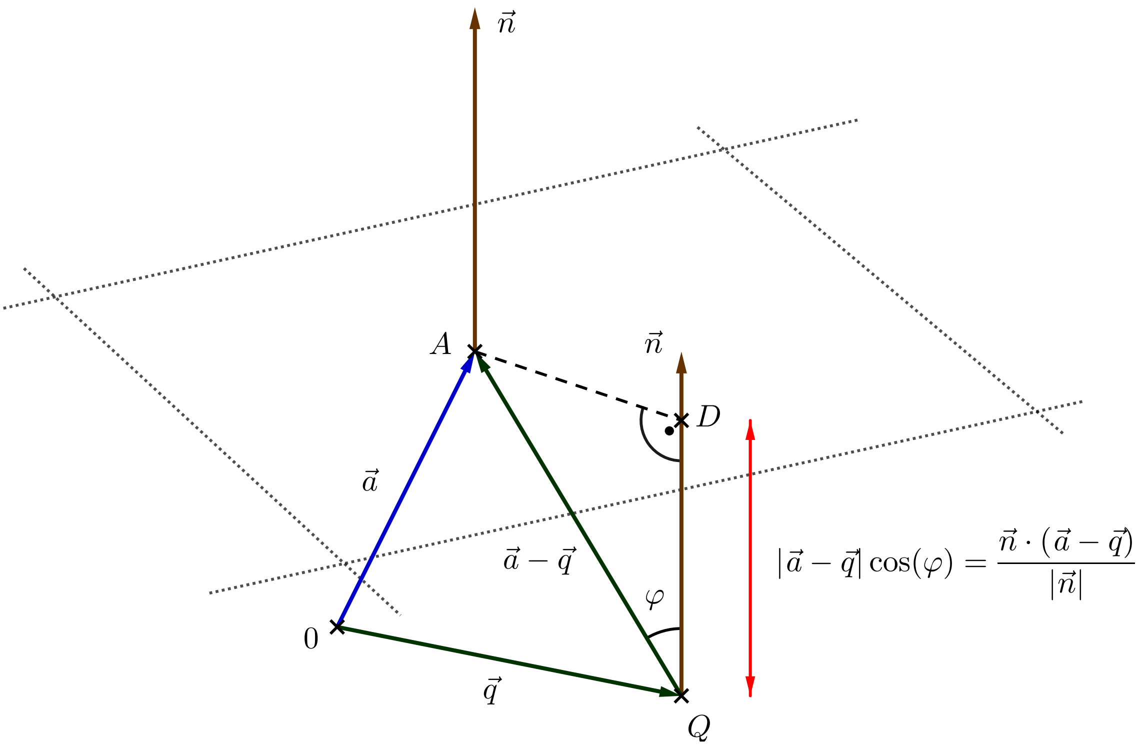
Teil 9: Die Abstände Punkt/Ebene, Punkt/Gerade, Gerade/Gerade und Lotfußpunkte

1 Abstand eines Punktes von einer Ebene und der Lotfußpunkt

1.1 Wiederholung: Abstand eines Punktes von einer Ebene

Wir erinnern uns an die Abbildung 1aus der wir die Formel für den Abstand eines beliebigen Punktes zu einer Ebene erhalten haben:

Abbildung 1: Zum Abstand eines Punktes Q zu einer Ebene



1. Ist eine Ebene $\mathcal{E}$ durch einen Aufpunktvektor $\vec{a}$ und einen Normalenvektor $\vec{n}$ in der Normalform $\vec{n}\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot\vec{a}$ gegeben, dann ist der Abstand des Punktes Q mit Ortsvektor $\vec{q}$ zu $\mathcal{E}$ durch

$$\boxed{d(Q,\mathcal{E}) = \left|\frac{\vec{n}\cdot(\vec{a}-\vec{q})}{|\vec{n}|}\right|}$$

Abstand Punkt ↔ Ebene (in Normalform)

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

Version: 2. November 2023

gegeben.

2. Ist die Ebene $\mathcal{E}$ durch die Koordinatenform $ax + by + cz = d$ gegeben, und ist $Q = (q_1/q_2/q_3)$, dann ist der Abstand von Q zu $\mathcal{E}$ durch

$$\boxed{d(Q,\mathcal{E}) = \left| \frac{aq_1 + bq_2 + cq_3 - d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right|} \qquad \textbf{Abstand Punkt} \leftrightarrow \textbf{Ebene (in Koordinatenform)}$$

gegeben.

Hinweis: Ist die Ebene in Parameterform gegeben, dann bestimme man zunächst die Koordinatenform oder die Normalform!

1.2 Der Lotfußpunkt eines Punktes in einer Ebene

Der Punkt D in Abbildung 1 ist der **Fußlotpunkt des Punktes Q in der Ebene** $\mathcal{E}$.

Diesen Punkt erhalten wir, wie in der Abbildung angedeutet als Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden, die den Aufpunkt Q und Richtungsvektor $\vec{n}$ hat.

Das praktische Vorgehen ist wie folgt:

1. Setze die Geradengleichung $\vec{x} = \vec{q} + t\vec{n}$ in die Ebenengleichung $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}$ ein und löse nach t auf:

$$\vec{n} \cdot (\vec{q} + t\vec{n}) = \vec{n} \cdot \vec{a} \iff t|\vec{n}|^2 = \vec{n} \cdot (\vec{a} - \vec{q}) \iff t = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{a} - \vec{q})}{|\vec{n}|^2}$$

2. Setze das erhaltene t in die Geradengleichung ein und erhalte den Ortsvektor von D:

$$\boxed{\overrightarrow{0D} = \vec{q} + \frac{\vec{n} \cdot (\vec{a} - \vec{q})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}} \qquad \textbf{Fußlotpunkt von } Q \textbf{ in } \mathcal{E}$$

Auch das sieht noch etwas abstrakt aus. Das ändert sich aber, weil wir das ganze typischerweise in Koordinatenschreibweise durchführen:

Beispiel 1. Die Ebene ist gegeben durch $2x - 4y - 3z = -8$. Gesucht ist der Fußlotpunkt von $Q(1/-1/3)$.

Mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ der Ebene ist die Geradendarstellung $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ -1-4t \\ 3-3t \end{pmatrix}$.

Diese setzen wir in die Ebenengleichung ein:

$$2(1+2t) - 4(-1-4t) - 3(3-3t) = 12$$

und erhalten daraus

$$2+4t+4+16t-9+9t=12 \iff -3+29t=12 \iff t=\frac{15}{29}.$$

Das eingesetzt in die Geradenleichung gibt

$$x(\tfrac{15}{29}) = \begin{pmatrix} 1+\frac{30}{29} \\ -1-\frac{60}{29} \\ 3-\frac{45}{29} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{59}{29} \\ -\frac{89}{29} \\ \frac{42}{29} \end{pmatrix}$$

und damit den Fußlotpunkt $D = \left(\frac{59}{29}/-\frac{89}{29}/\frac{42}{29}\right)$

2 Abstand zweier paralleler Ebenen oder einer Geraden zu einer parallelen Ebene

Da die parallelen Ebenen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ überall den gleichen Abstand haben, reicht es den Abstand eines Punktes von $\mathcal{F}$ von der Ebene $\mathcal{E}$ zu bestimmen.

Genauso reicht es bei der Geraden $\mathfrak{g}$ und der parallelen Ebene $\mathcal{E}$ den Abstand eines Punktes von $\mathfrak{g}$ von der Ebene $\mathcal{E}$ zu bestimmen.

Wir bestimmen von $\mathcal{E}$ einen Normalenvektor[1] $\vec{n}$ und einen Punkt A mit Ortsvektor $\vec{a}$ (z. B. aus der Normal- bzw. Koordinatenform).

Zusätzlich bestimmen wir von der Ebene $\mathcal{F}$ (oder von der Geraden $\mathfrak{g}$) einen Punkt B mit Ortsvektor $\vec{b}$ (z. B. den jeweiligen Aufpunkt).

Dann gilt $d(\mathcal{F},\mathcal{E}) = d(B,\mathcal{E})$ bzw. $d(\mathfrak{g},\mathcal{E}) = d(B,\mathcal{E})$. Das gibt schließlich

$$\boxed{d(\mathcal{F},\mathcal{E}) = \left|\frac{\vec{n}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{n}|}\right|}$$ **Abstand Ebene $\leftrightarrow$ parallele Ebene**

$$\boxed{d(\mathfrak{g},\mathcal{E}) = \left|\frac{\vec{n}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{n}|}\right|}$$ **Abstand Gerade $\leftrightarrow$ parallele Ebene**

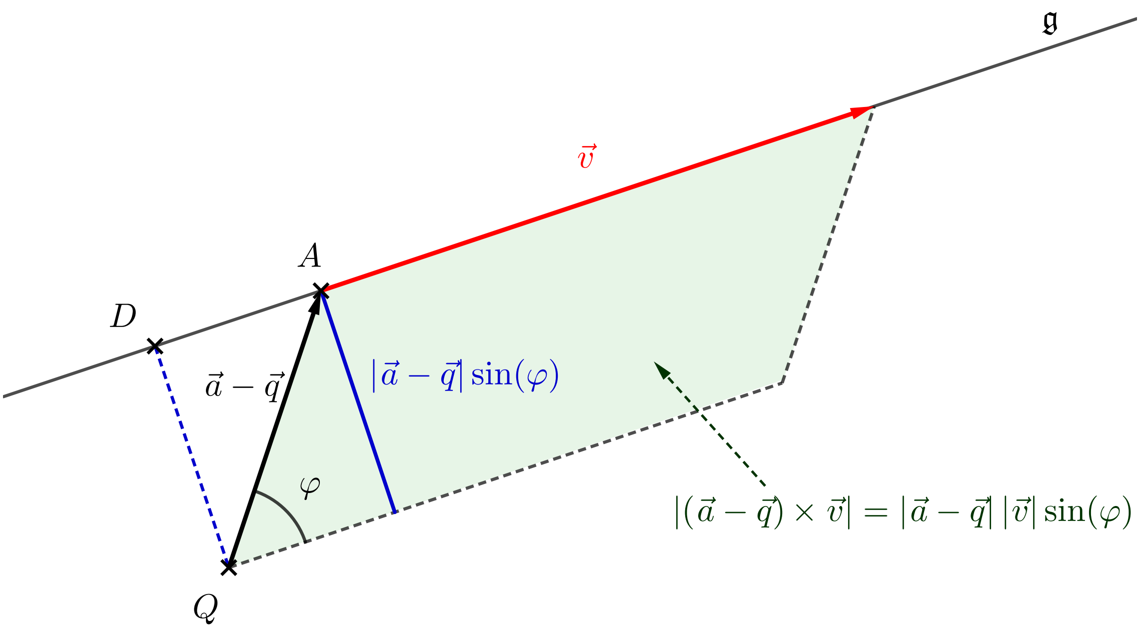
3 Abstand eines Punktes von einer Geraden und der Fußlotpunkt

3.1 Abstand eines Punktes von einer Geraden

Der Abstand eines Punktes Q von einer Geraden $\mathfrak{g}$ erhalten wir, indem wir Länge der kürzesten Verbindung messen. Die kürzeste Verbindung wiederum erhalten wir durch die senkrechte Verbindung, die gestichelte blaue Linie in Abbildung 2.

[1] Das ist dann natürlich auch ein Normalenvektor der parallelen Ebene $\mathcal{F}$

Abbildung 2: Zum Abstand eines Punktes Q zu einer Geraden $\mathfrak{g}$



Die Länge der Abstandslinie ist $|\vec{a}-\vec{q}|\sin(\varphi)$. Mit Der Flächenformel für das Kreuzprodukt haben wir schließlich

$$\boxed{d(Q,\mathfrak{g}) = \frac{|(\vec{a}-\vec{q})\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}} \qquad \textbf{Abstand Punkt} \leftrightarrow \textbf{Gerade}$$

Beispiel 2. Gesucht ist der Abstand des Punktes $Q = (-1/6/1{,}5)$ von der Geraden $\mathfrak{g}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}$.

Es ist $\vec{a}-\vec{q} = \begin{pmatrix}-2-(-1)\\1-6\\-1-1{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-5\\-2{,}5\end{pmatrix}$ und damit $(\vec{a}-\vec{q})\times\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\-5\\-2{,}5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-5)\cdot 5-(-3)\cdot(-2{,}5)\\1\cdot(-2{,}5)-(-1)\cdot 5\\(-1)\cdot(-3)-1\cdot(-5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-32{,}5\\2{,}5\\8\end{pmatrix}$. Das gibt

$$d(Q,\mathfrak{g}) = \frac{\sqrt{32{,}5^2+2{,}5^2+8^2}}{\sqrt{1^2+3^2+5^2}} \approx 5{,}67$$

3.2 Fußlotpunkt eines Punktes auf einer Geraden

Der Fußlotpunkte von Q auf $\mathfrak{g}$ ist der Punkt D in Abbildung 2. Um D zu bestimmen sehen wir uns zunächst einen Verbindungsvektor zwischen Q und einem beliebigen Punkt der Geraden an:

$$\vec{x}(t)-\vec{q} = \vec{a}+t\vec{v}-\vec{q} = (\vec{a}-\vec{q})+t\vec{v}$$

Der Fußlotpunkt D gehört nun zu dem Parameterwert t für den dieser Verbindungsvektor senkrecht auf $\vec{c}$ steht, also $(\vec{x}(t) - \vec{q}) \cdot \vec{v} = 0$. Das gibt mit $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$

$$(\vec{x}(t) - \vec{q}) \cdot \vec{v} = 0 \iff (\vec{a} - \vec{q}) \cdot \vec{v} + t\vec{v} \cdot \vec{v} \iff t = -\frac{(\vec{a} - \vec{q}) \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}$$

Diesen Wert kann man jetzt in $\mathfrak{g}$ einsetzen und erhält den Ortsvektor zum Fußlotpunkt:

$$\boxed{\overrightarrow{0D} = \vec{a} - \frac{(\vec{a} - \vec{q}) \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\,\vec{v}} \qquad \textbf{Fußlotpunkt von } Q \textbf{ auf } \mathfrak{g}$$

Beispiel 3. Wir nutzen wieder Q und $\mathfrak{g}$ aus Beispiel 2.

Dort ist $(\vec{a} - \vec{q}) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 + (-5) \cdot (-3) + (-2{,}5) \cdot 5 = 1{,}5$ und $|\vec{v}|^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 = 35$. Das gibt schließlich

$$t = -\frac{(\vec{a} - \vec{q}) \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} = -\frac{1{,}5}{35} = -\frac{3}{70}$$

und damit

$$\overrightarrow{0D} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{70} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{143}{70} \\ \frac{79}{70} \\ -\frac{85}{70} \end{pmatrix}$$

also $D = \left(-\frac{143}{70} / \frac{79}{70} / -\frac{85}{70} \right)$.

Damit lässt sich nun auch der Abstand $d(Q, \mathfrak{g})$ bestimmen, denn es gilt $d(Q, \mathfrak{g}) = \left|\overrightarrow{DQ}\right| = \left|\overrightarrow{0D} - \vec{q}\right|$. In unserem Fall ist das

$$\sqrt{\left(-1 - \left(-\frac{143}{70}\right)\right)^2 + \left(6 - \frac{79}{70}\right)^2 + \left(1{,}5 - \left(-\frac{85}{70}\right)\right)^2} \approx 5{,}67$$

4 Abstand zweier Geraden

4.1 Abstand zweier paralleler Geraden

Die Geraden $\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{v}$ und $\mathfrak{h} : \vec{x}(t) = \vec{b} + t\vec{v}$ sind parallel. Der Abstand der beiden Geraden ist überall gleich groß. Daher reicht es, den Abstand des Aufpunktes der einen Gerade von der anderen Gerade zu bestimmen, z. B. $d(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = d(B, \mathfrak{g})$. Das gibt dann

$$\boxed{d(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = \frac{|(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}} \qquad \textbf{Abstand zweier paralleler Geraden}$$

4.2 Abstand zweier windschiefer Geraden

Um den Abstand zweier windschiefer Ebenen $\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{v}$ und $\mathfrak{h} : \vec{x}(t) = \vec{b} + t\vec{w}$ zu bestimmen, nutzen wir einen Trick.

Wir konstruieren eine Hilfsebene $\mathcal{E}$, die die Gerade $\mathfrak{g}$ enthält und parallel zur Geraden $\mathfrak{h}$ verläuft. Dazu ergänzen wir $\mathfrak{g}$ um die zusätzliche Richtung $\vec{w}$ von $\mathfrak{h}$:

$$\mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \vec{a} + t\,\vec{v} + s\,\vec{w}\,.$$

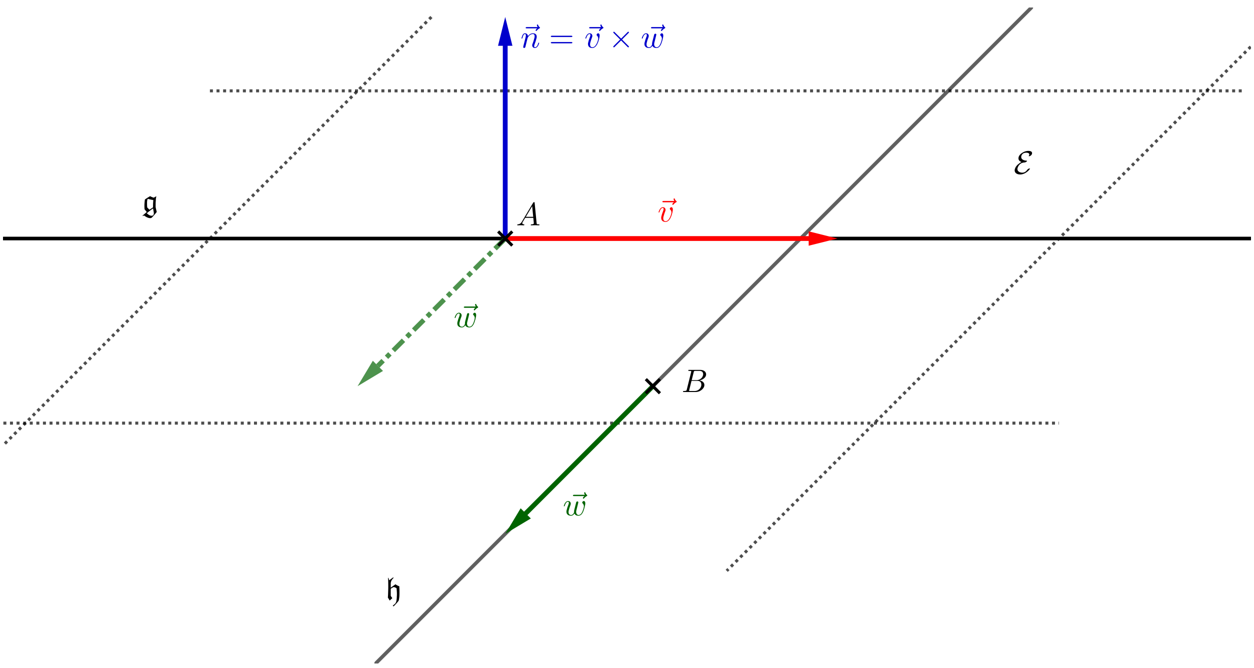
Ein Normalenvektor dieser Ebene ist damit $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$, siehe Abbildung 3.

Nun ist der Abstand zwischen $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}$ der gleiche, wie der von $\mathfrak{h}$ und der Ebene $\mathcal{E}$, denn irgendwann muss $\mathfrak{h}$ ja "unter $\mathfrak{g}$ herlaufen". Dieser Abstand wiederum ist überall gleich, also genauso groß, wie der Abstand zwischen dem Aufpunkt B und der Ebene $\mathcal{E}$. Damit haben wir $d(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = d(\mathfrak{h}, \mathcal{E}) = d(B, \mathcal{E})$ und schließlich

$$\boxed{d(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = \left| \frac{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w})}{|\vec{v} \times \vec{w}|} \right|}$$

Abstand zweier windschiefer Geraden

Abbildung 3: Zum Abstand zweier windschiefer Geraden $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$



Beispiel 4. a) Die Geraden $\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{h} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind parallel. Es ist

$$(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{v} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $|(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{v}| = \sqrt{3^2+3^2+0^2} = \sqrt{18}$. Weiter ist $|\vec{v}| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$. Beides zusammen gibt

$$d(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \frac{|(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} \approx 1{,}73$$

b) Die Geraden $\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\mathfrak{h} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ sind windschief. Es ist

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

sodass

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix} = 2\cdot 0 + (-2)\cdot(-4) + (-1)\cdot 2 = 6$$

und

$$|\vec{v}\times\vec{w}| = \sqrt{0^2+4^2+2^2} = \sqrt{20}$$

Das zusammen gibt

$$d(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \left|\frac{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}{|\vec{v}|}\right| = \frac{6}{\sqrt{20}} \approx 1{,}34$$