Frank Klinker

Das Drehmoment

Teil 1: Die Wippe, die Schubkarre und das Hebelgesetz

1 Die Wippe

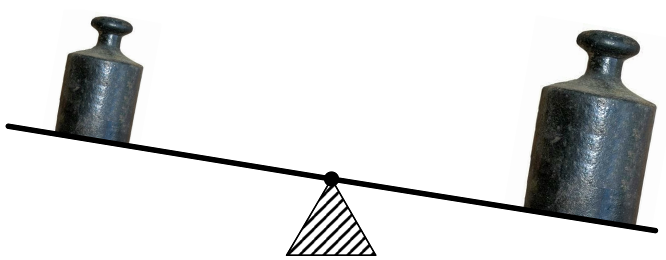
Als Wippe bezeichnet man eine Apparatur, die genau dem entspricht, was wir als Kinder als Wippe kennengelernt haben: Einen (starren) Stab, der in der Mitte gelagert ist und auf dem links und rechts von diesem Lager eine gewisse Masse platziert wird (üblicherweise mindestens zwei Personen), siehe Abb. 1.

Abb. 1: Eine "echte" Wippe

In unserer physikalischen Welt suchen wir nun den "idealen Zustand" des Systems aus Wippe und platzierten Massen: *Das Gleichgewicht*.

Unsere physikalische Wippe sieht etwa so aus wie in Abb. 2

Abb. 2: Die "physikalische" Wippe



Versuch 1. Wir basteln uns eine physikalische Wippe und versuchen unter Auflegen verschiedener Gewichte links und rechts vom Auflagepunkt die Gleichgewichtssituation zu erzwingen. Als qualitatives Resultat erhalten wir:

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

- Bei zwei gleichen Massen ist die Wippe nur im Gleichgewicht, wenn man diese geeignet platziert. Das ist der Fall, wenn das gesamte Bild sehr symmetrisch ist und man beide Massen gleich weit vom Auflagepunkt aufstellt.
- Auch bei unterschiedlichen Massen lässt sich ein Gleichgewicht einstellen: Hier muss man die schwerere Masse weiter vom Auflagepunkt entfernt platzieren als die leichte.

Versuch 2. Wir verfeinern Versuch 1, indem wir die zum Gleichgewicht nötigen Abstände notieren. Das Ergebnis lässt sich exemplarisch wie folgt zusammenfassen:

- Ist die rechte Masse doppelt so groß wie die linke Masse, so muss man die linke doppelt so weit vom Auflagepunkt platzieren wie die rechte.
- Ver-n-facht man die rechte Masse, so muss man den linken Abstand ver-n-fachen.

2 Das Hebelgesetz

Bemerkung 3. Statt eine Masse auf die eine Seite der Wippe zu legen, können wir auch auf beliebige Weise eine Kraft auf diese Seite ausüben. Üben wir diese Kraft an der gleichen Stelle aus, an der das Gewichtsstück platziert war, so muss unsere Kraft der Gewichtskraft des Gewichtsstücks entsprechen.
Statt von Massen kann man also auch von angreifenden Kräften sprechen.

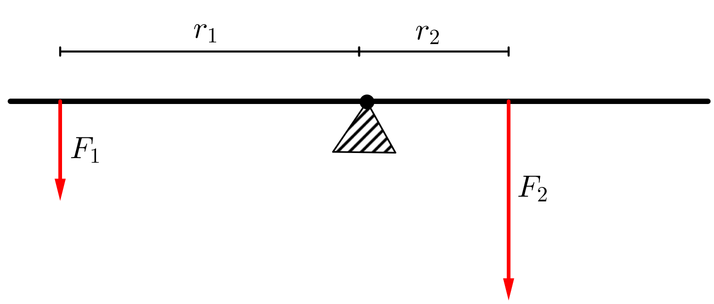
Wir fassen das Ergebnis zusammen und verwenden den üblichen Namen[(a)].

Das Hebelgesetz

Wir bezeichnen mit F_i die Kräfte, die auf die Wippe ausgeübt werden, und mit r_i die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte vom Auflagepunkt, siehe Abb. 2. Dann lautet die Gleichgewichtsbedingung für die Wippe:

$$\boxed{F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2}$$

Abb. 3: Das Hebelgesetz



[(a)] Warum dieser Name sinnvoll ist, sehen wir, wenn wir uns die abschließenden Beispielanwendungen ansehen.

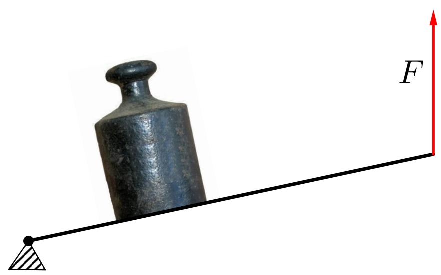
3 Die Schubkarre

Ohne große Vorrede, sehen wir uns eine Schubkarre wie in Abb. 4 an:

Abb. 4: Die "echte" Schubkarre

Wie bereits die Wippe "idealisieren" wir auch die Schubkarre und erhalten eine physikalische Schubkarre:

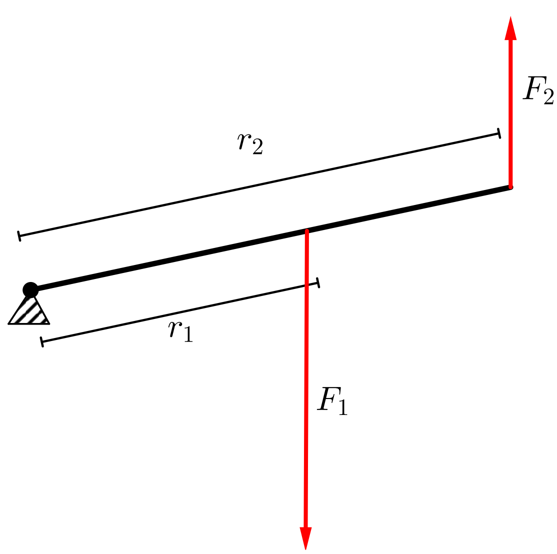
Abb. 5: Die "physikalische" Schubkarre



Eine naheliegende Variation des Wippenversuchs liefert uns, dass auch im Fall der Schubkarre das Hebelgesetz gilt, also $\boxed{F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2}$.

Dazu sind die zugehörigen Abstände wie in Abb. 6 zu wählen:

Abb. 6: Das Hebelgesetz an der Schubkarre



4 Einige praktische Anwendungen des Hebelgesetzes

Aufgabe 4. Beschreiben Sie die Funktionsweise der Werkzeuge aus Abb. 7 mit Blick auf das Hebelgesetz.
Erläutern Sie auch, warum der Name *Hebelgesetz* sinnvoll gewählt ist.

Abb. 7: Anwendungen des Hebelgesetzes

Bezeichnung 5. Je nach Ausführung und Funktionsweise des Hebelapparates spricht man von einem zweiseitigen oder einem einseitigen Hebel:

- *Funktion wie Wippe:* zweiseitiger Hebel
- *Funktion wie Schubkarre:* einseitiger Hebel

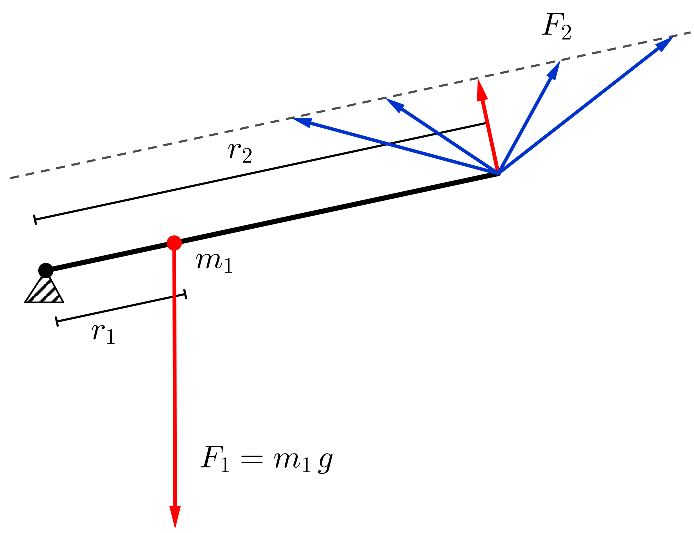
Abb. 8: Das Hebelgesetz und ein zweiseitiger Hebel

5 Die Richtung der Kraft am Hebel

Die Kraft und die Strecke sind gerichtete Größen. Und da beide Größen als r und als F in das Hebelgesetz einfließen ist es naheliegend einen eventuellen Einfluss der Richtung zu untersuchen

Dazu betrachten wir nochmal unsere idealisierte Schubkarre. Wir heben unsere Masse m_1 auf eine feste Höhe an und lassen nacheinander die dafür notwendige Kraft F_2 in verschiedene Richtungen wirken, siehe Abb. 9.

Abb. 9: Die Schubkarre wird in unterschiedliche Richtungen angehoben



Wir stellen folgende Eigenschaften fest:

- $\boxed{\text{Die geringste Kraft ist nötig, wenn wir senkrecht zum Hebelarm anheben}}$

- Wir zerlegen in Abb. 9 alle Hebekräfte F_2 in ihr Komponenten $F_2^{\perp}$ senkrecht zum Hebelarm und ihre Komponenten $F_2^{||}$ parallel zum Hebelarm.

  Wir sehen, dass die Komponente parallel zum Hebelarm keine Hebewirkung hat (was anschaulich auch klar sein kann). Lediglich $F_2^{\perp}$ trägt zum Anheben der Schubkarre bei.

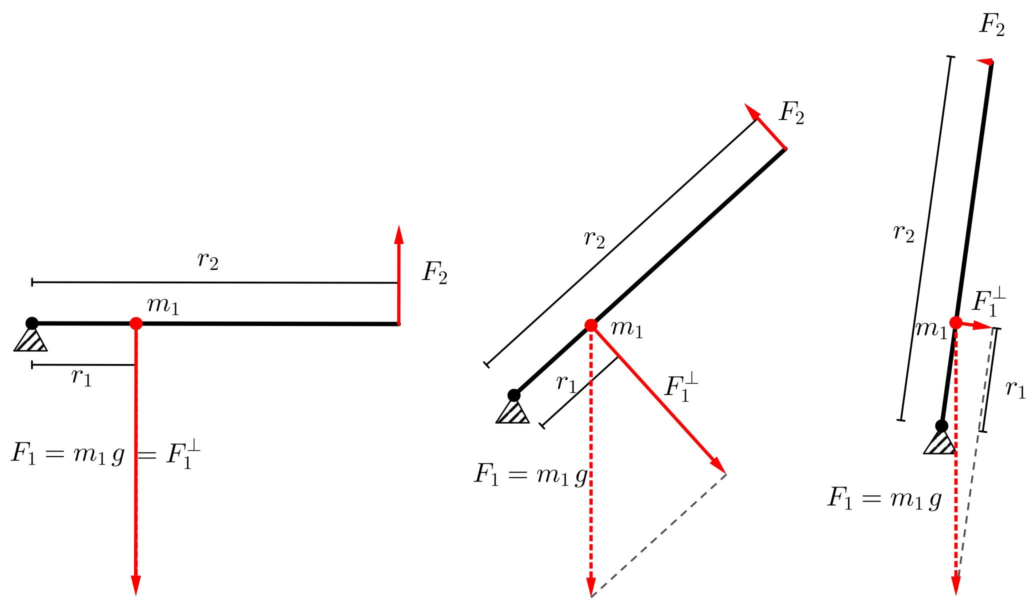
Bisher haben wir uns auf die Hebe- bzw. Haltekraft F_2 konzentriert. Wie verhält es sich aber mit der Kraft F_1?

Dazu machen wir folgendes Gedankenexperiment: Wir wollen einen liegenden Baumstamm senkrecht aufstellen. Zum ersten Anheben benötigen wir sehr viel Kraft, aber je steiler wir den Stamm bereits gestellt haben, desto leichter fällt es uns ihn weiter aufzustellen. Wenn er dann fast senkrecht steht, müssen wir nur noch eine sehr kleine Kraft investieren, um den Stamm senkrecht zu halten (ihn zu balancieren).

Das bedeutet: je steiler wir den Stamm aufgestellt haben, desto geringer ist die Last, die wir anheben müssen (obwohl sich das Gewicht des Stammes nicht ändert).

Wir übertragen das Gedankenexperiment auf unsere idealisierte Schubkarre und erinnern uns an die Bedeutung der Richtung der Hebekraft F_2. Es ist tatsächlich so, dass der Gleiche Grund auch für das Baumstammphänomen verantwortlich ist. Dazu sehen wir uns in Abb. 10 drei verschiedene Anhebesituationen an: zu Beginn, ungefähr bei der Hälfte und kurz vor dem Aufstellen.

Abb. 10: Die Schubkarre wird immer steiler aufgestellt



6 Das Hebelgesetz überarbeitet

Wir haben gesehen, dass nicht die Produkte $F \cdot r$ sondern lediglich die Produkte $F^\perp \cdot r$ für die Formulierung des Hebelgesetzes entscheidend sind. Diese Produkte lassen sich sprachlich so formulieren:

$$\boxed{\text{Kraft senkrecht zum Hebelarm} \times \text{Länge des Hebelarms}}$$

Wir haben die Situation in Abb. 6a gezeichnet. Dort sehen wir, dass das Produkt $F^\perp \cdot r$ der Fläche des durch F und r aufgespannten Parallelogramms entspricht ($F^\perp = F \sin(\alpha)$ ist die Höhe und r die Grundseite des Parallelogramms).

In einem Parallelogramm findet man immer zwei Höhen, abhängig davon, welche Seite man als Grundseite wählt. Wählen wir nicht wie oben r als Grundseite, sondern F, dann ist die in Abb. 6a eingezeichnete Seite $r^\perp = r \sin(\alpha)$ die Höhe. Die Fläche des ist dann $F \cdot r^\perp$. In diesem Fall lassen sich die Produkte sprachlich so formulieren:

$$\boxed{\text{Kraft} \times \text{senkrechter Abstand der Kraft vom Auflagepunkt}}$$

Den Winkel α erhält man als Winkel zwischen r und F, nachdem man F in den Auflagepunkt verschoben hat, siehe Abb. 6b.

Abb. 6a: Die entscheidenden Komponenten

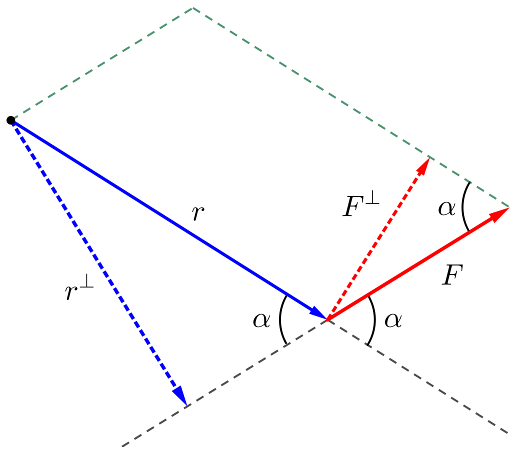
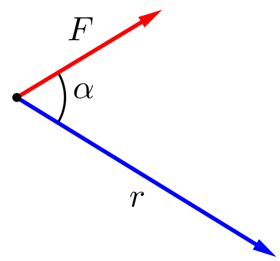


Abb. 6b: Der Winkel α



Damit lässt sich das Hebelgesetz auf folgende drei gleichwertige Arten beschreiben:

$$\boxed{r_1 \cdot F_1^{\perp} = r_2 \cdot F_2^{\perp}} \qquad \boxed{r_1^{\perp} \cdot F_1 = r_2^{\perp} \cdot F_2} \qquad \boxed{r_1 \cdot F_1 \cdot \sin(\alpha_1) = r_2 \cdot F_2 \cdot \sin(\alpha_2)}$$

Bemerkung 6.
- Welche Variante man verwendet, hängt oft von der vorliegenden geometrischen Situation ab.
- Sind die Winkel α_1 (zwischen r_1 und F_1) und α_2 (zwischen r_2 und F_2) gleich, dann kürzen sich die Sinus weg und man kann die "alte" Variante des Hebelgesetzes verwenden, siehe dazu das Schubkarrenbeispiel aus Abb. 6.

Abb. 11: Archimedes bewegt die Erde mit einem Hebel (Quelle)