Frank Klinker

Das Drehmoment

Teil 2: Das Drehmoment und das Gleichgewicht

1 Vom Hebelgesetz zum Drehmoment

1.1 Die Orientierung von Kraft und Kraftarm

Wie wir gesehen haben spielt beim Hebelgesetz die zusammengesetzte Größe $r \cdot F^\perp$ oder mit dem gleichen Wert $r^\perp \cdot F$ eine große Rolle.[1]

Da die Strecke r und die Kraft $F^\perp$ gerichtete Größen sind, werden wir auch für das Produkt eine "Richtung" festlegen und dieses durch das Vorzeichen $+$ oder $-$ beschreiben. Dieses Vorzeichen wird durch die Orientierung von r und $F^\perp$ vorgegeben (dabei spielt die Reihenfolge der beiden Größen eine zentrale Rolle).

Zur Entscheidung, ob positive oder negative Orientierung vorliegt, verwenden wir die **Rechte-Hand-Regel**:

> Man zeigt mit dem Daumen der rechten Hand in Richtung r und mit dem Zeigefinger in Richtung $F^\perp$. Zeigt jetzt der Mittelfinger aus der Papierebene heraus, dann sind r und $F^\perp$ in dieser Reihenfolge positiv orientiert. Zeigt der Mittelfinger allerdings in die Papierebene hinein, dann sind die beiden negativ orientiert, siehe Abb. 1.

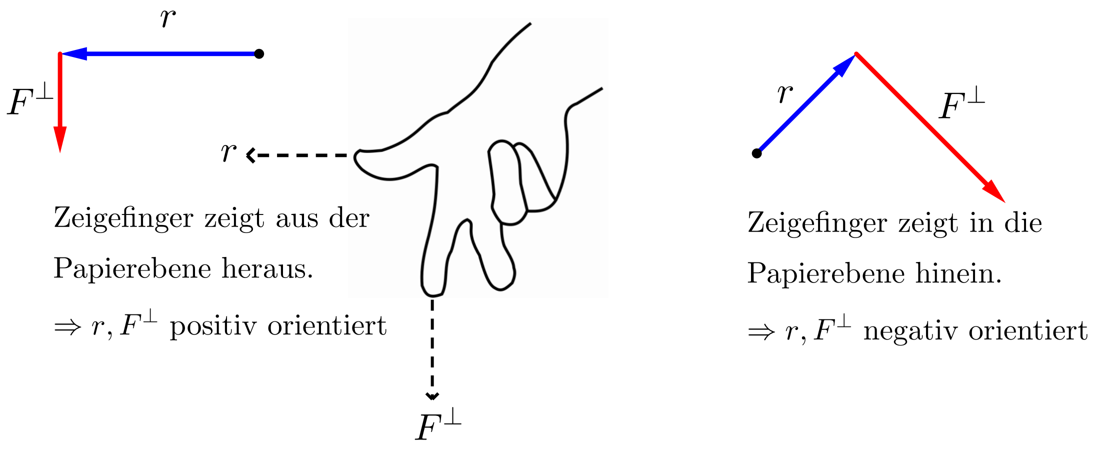


Abbildung 1: Die Rechte-Hand-Regel zur Bestimmung der Orientierung

Bezeichung 1. Greift eine Kraft F über einen Hebelarm r an, so sagen wir: r, F sind positiv/negativ orientiert, wenn $r, F^\perp$ positiv/negativ orientiert sind.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

Version: 29. Februar 2024

[1] Wir verwenden hier die Bezeichnungen aus *Das Drehmoment, Teil 1.*

1.2 Das Drehmoment am Hebelarm

Nun sind wir bereit **das Drehmoment** M einzuführen. Dazu gehen wir wie folgt vor[2]

> Das Drehmoment einer über einen Hebelarm der Länge r angreifenden Kraft F ist gegeben durch
>
> - $M = +r \cdot F^{\perp} > 0$, wenn r und F in dieser Reihenfolge *positiv orientiert* sind.
>
>   Ist $M > 0$, dann sagen wir: das Drehmoment zeigt aus der Papierebene heraus (so wie der Mittelfinger bei der Rechte-Hand-Regel).
>
> - $M = -r \cdot F^{\perp} < 0$, wenn r und F in dieser Reihenfolge *negativ orientiert* sind.
>
>   Ist $M < 0$, dann sagen wir: das Drehmoment zeigt in die Papierebene hinein (so wie der Mittelfinger bei der Rechte-Hand-Regel).

Wir wenden das auf unsere zwei Eingangsbeispiele Wippe und Schubkarre an.

Wippe:

Hier sind r_1 und F_1 positiv orientiert und deshalb $M_1 = r_1 F_1$. Auf der rechten Seite sind r_2 und F_2 negativ orientiert, also $M_2 = -r_2 F_2$.

Das Hebelgesetz lautet nun

$$M_1 = -M_2 \quad \text{oder} \quad \boxed{M_1 + M_2 = 0}$$

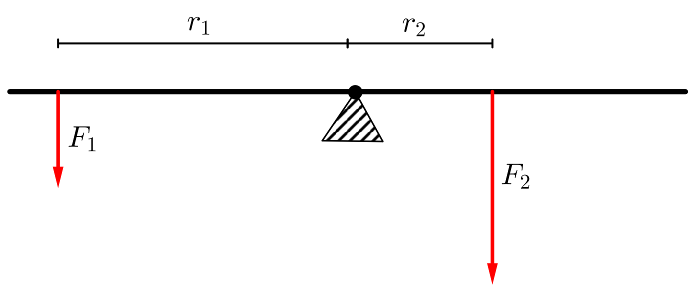


Abbildung 2: M_1 und M_2 an der Wippe

Schubkarre:

Hier sind r_1 und F_1 negativ orientiert und deshalb $M_1 = -r_1 F_1 \cos(\varphi)$. Die Größen r_2 und F_2 sind positiv orientiert, also $M_2 = r_2 F_2 \cos(\varphi)$.

Das Hebelgesetz lautet nun

$$-M_1 = M_2 \quad \text{oder} \quad \boxed{M_1 + M_2 = 0}$$

[2] Wir werden im folgenden stets mit $r, F^{\perp}$ argumentieren, aber alles bleibt genauso wahr, wenn wir zu $r^{\perp}, F$ übergehen.

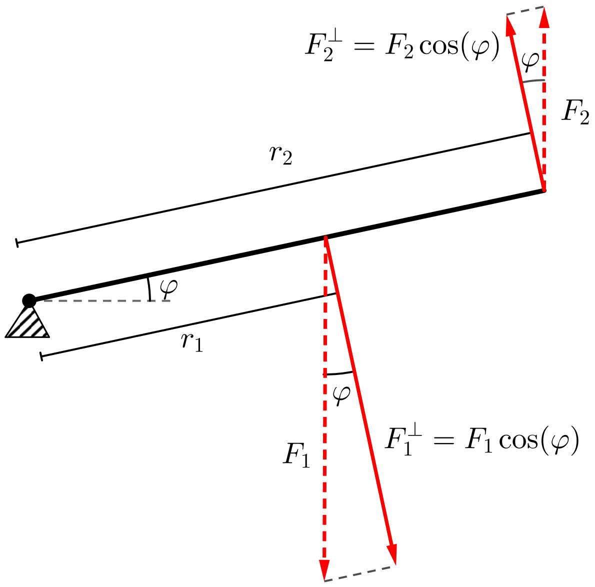


Abbildung 3: M_1 und M_2 an der Schubkarre

Bemerkung 2. 1. Haben wir die Möglichkeit den Winkel α zwischen r und F zu messen, dann lässt sich das Drehmoment wie folgt berechnen:

$$M = rF\sin(\alpha)$$

Um hier das korrekte Vorzeichen zu erhalten ist es sehr wichtig, den Winkel α beginnend bei r nach F und gegen den Uhrzeigersinn zu messen, siehe Abb. 4.

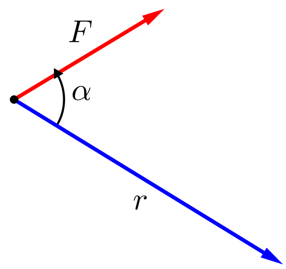


Abbildung 4: Der gerichtete Winkel zwischen r und F

2. Bei einem einseitigen oder zweiseitigen Hebel dürfen auch mehr als zwei Kräfte angreifen. Dann nennt man

$$\boxed{M_{\text{ges}} = M_1 + M_2 + \ldots + M_k}$$

das **Gesamtdrehmoment** des Hebels. Dabei bezeichnen $M_1, M_2, \ldots, M_k$ die Teildrehmomente der angreifenden Kräfte.

Hinweis: Das Hebelgesetz kann man jetzt sehr kompakt beschreiben. Es gilt auch, wenn mehr als eine Kraft am Hebel angreift:

Hebelgesetz in Drehmomentformulierung

Ein Hebel befindet sich im **Gleichgewicht**, wenn das Gesamtdrehmoment verschwindet:

$$\boxed{M_{\text{ges}} = 0}$$

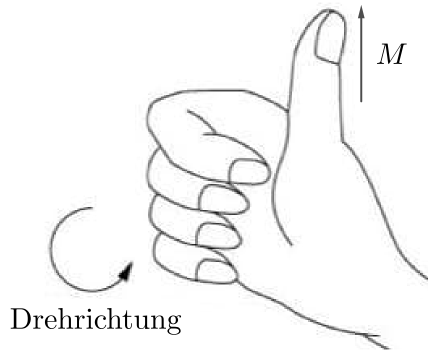
2 Auswirkung eines Gesamtdrehmoments $M_{\text{ges}} \neq 0$

Wir wissen alle, was passiert, wenn eine Wippe oder eine Schubkarre nicht im Gleichgewicht ist: Sie dreht sich um ihren Auflagepunkt.

Das erkennt man daran, dass der Gesamtdrehmoment nicht verschwindet: $M_{\text{ges}} \neq 0$. Genauer gilt:

- Ist $M_{\text{ges}} > 0$, so verläuft die Drehung gegen den Uhrzeigersinn.
- Ist $M_{\text{ges}} < 0$, so verläuft die Drehung mit dem Uhrzeigersinn.

Zur Entscheidung der Drehrichtung kann man die **Rechte-Faust-Regel** verwenden:

> Zeigt der Daumen in Richtung des Gesamtdrehmoments, dann weisen die gekrümmten Finger in die Drehrichtung, siehe Abb. 5
>
> 
>
>
> Abbildung 5: Die Rechte-Faust-Regel zur Bestimmung der Drehrichtung

3 Beispiele für Hebelsysteme

3.1 Die Wippe genauer angesehen

Wir wenden uns noch einmal der Wippe zu. Neben der Anwendung auf dem Spielplatz werden größere Varianten z. B. im Zirkus verwendet, siehe Abb. 6.

Abbildung 6: Das Todesrad (Allan Heardman, CC BY-SA 2.0) und eine (Balkenwaage (CC0 1.0)

Unsere bisherigen Abbildungen zur Wippe suggerieren, dass das Gleichgewicht der Wippe mit der waagerechten Ausrichtung verbunden ist. Das ist allerdings so nicht korrekt! Dazu sehen wir uns die Skizze aus Abb. 7 an:

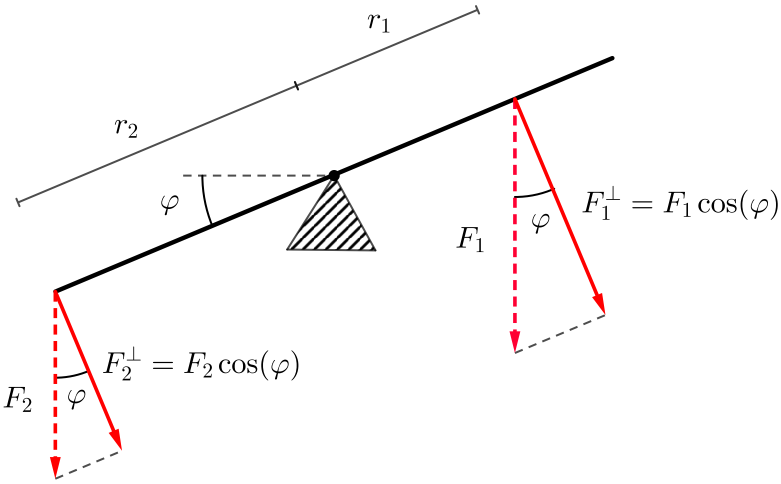


Abbildung 7: Die schräge Wippe

Die Gleichgewichtsbedingung lautet $r_1 F_1^\perp = r_2 F_2^\perp$ oder

$$r_1 F_1^\perp = r_2 F_2^\perp \iff r_1 F_1 \cos(\varphi) = r_2 F_2 \cos(\varphi) \overset{\varphi \neq 90^\circ}{\iff} r_1 F_1 = r_2 F_2$$

und ist damit unabhängig von der Wahl der Auslenkung φ der Wippe gegenüber der Waagerechten (die Ausnahme $\varphi = 90°$ sehen wir uns später an)

1. $\boldsymbol{r_1 = r_2}$

   Dies ist der Fall, in dem beide Kräfte in gleichem Abstand vom Auflagepunkt angreifen. In diesem Fall tritt für jeden Winkel Gleichgewicht bei $F_1 = F_2$ ein.

   Das verleitet dazu, diese Wippe als einfache Waage zu verwenden. Allerdings ist das etwas unpraktisch: Bei einer Waage möchte man optisch entscheiden, ob ein Gleichgewicht herrscht, und dieses optische Kriterium ist die waagerechte Position und nicht irgendein Stillstand der Waage. Ein weiteres größeres Problem ist jedoch, dass keine Toleranz im Unterschied der aufgelegten Massen erlaubt ist: Bereits bei einem kleinsten Unterschied zwischen den Massen ist das Gleichgewicht verletzt.

   Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass man diese Probleme leicht umgehen kann.

2. $\boldsymbol{\varphi = 90°}$

   Diese Situation ist wegen $\cos(90°) = 0$ bei jeder Wahl der Kräfte F_1, F_2 ein Gleichgewicht.

3. Abweichung vom Gleichgewicht

   Was passiert, wenn man in Fall 2. etwas von 90° abweicht? Oder wenn in Fall 1. die Kräfte ein wenig unterschiedlich sind? Es passiert natürlich genau das, was wir erwarten!

Dazu sehen wir uns das Gesamtdrehmoment der Wippe an.

$$M_{\text{ges}} = M_1 + M_2 = -r_1 F_1^{\perp} + r_2 F_2^{\perp} = (r_2 F_2 - r_1 F_1)\cos(\varphi)$$

Ist $\varphi < 90°$, so ist $\cos(\varphi) > 0$. Dann bewegt sich die Wippe im Uhrzeigersinn, wenn $M_{\text{ges}} < 0$ ist. Das ist der Fall, wenn $r_1 F_1 > r_2 F_2$, also wenn "oben ein Übergewicht herrscht". Die Wippe bewegt sich gegen den Uhrzeigersinn, wenn $M_{\text{ges}} > 0$ ist. Das ist der Fall, wenn $r_2 F_2 > r_1 F_2$, also wenn "unten ein Übergewicht herrscht", siehe Abb. 8.

Ist $\varphi > 90°$, so ist $\cos(\varphi) < 0$ und die beiden Fälle kehren sich um.

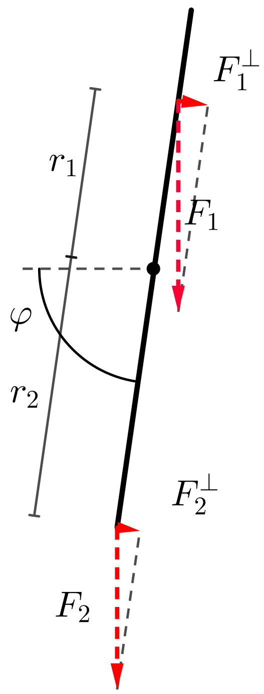


Abbildung 8: Eine fast senkrechte Wippe

3.2 Eine Wippe mit erhöhtem Drehpunkt: Die Balkenwaage

Wir wenden uns nochmal dem zweiseitigem Hebel zu und zwar in der Form einer Wippe deren Aufhängepunkt etwas (um die Strecke h) nach oben versetzt ist, siehe Abb. 9. ℓ_1 und ℓ_2 bezeichnen in der Abbildung die Länge der Wippenarme. Diese stimmen hier nicht mit den Hebellängen überein. Letztere haben in der Abbildung die Bezeichnungen r_1 und r_2.

Aus der Geometrie in Abb. 9 und den Additionstheoremen für den Kosinus[3] ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\cos(\varphi_1) = \frac{\ell_1}{r_1}, \quad \cot(\varphi_1) = \frac{\ell_1}{h}, \quad \cos(\varphi_2) = \frac{\ell_2}{r_2}, \quad \cot(\varphi_2) = \frac{\ell_2}{h}$$
$$F_1^{\perp} = F_1 \cos(\varphi_1 + \delta) = F_1 \cos(\varphi_1)\cos(\delta) - F_1 \sin(\varphi_1)\sin(\delta)$$

[3] $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$

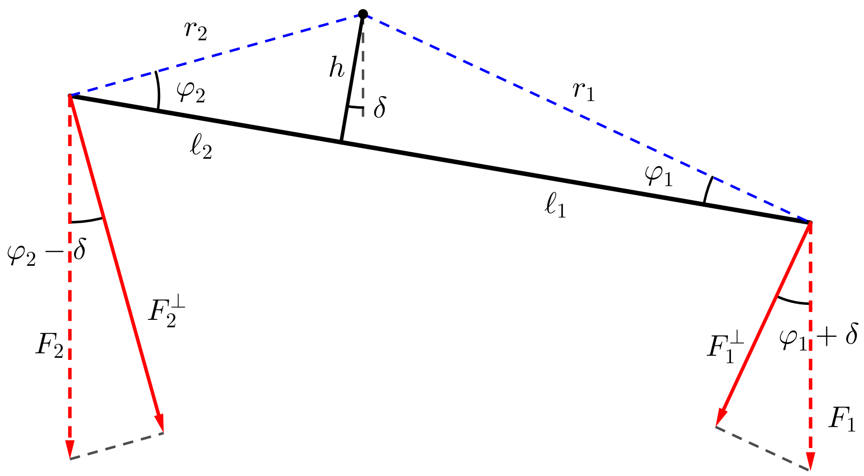


Abbildung 9: Eine Wippe mit erhöhter Aufhängung

$$F_2^\perp = F_2 \cos(\varphi_2 - \delta) = F_2 \cos(\varphi_2)\cos(\delta) + F_2 \sin(\varphi_2)\sin(\delta)$$

Die Drehmomente rechts und links berechnen sich damit zu

$$\begin{aligned} M_1 = -r_1 F_1^\perp &= -\frac{\ell_1}{\cos(\varphi_1)}\Big(F_1\cos(\varphi_1)\cos(\delta) - F_1\sin(\varphi_1)\sin(\delta)\Big) \\ &= -\ell_1 F_1 \cos(\delta) + \ell_1 F_1 \tan(\varphi_1)\sin(\delta) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} M_2 = r_2 F_2^\perp &= \frac{\ell_2}{\cos(\varphi_2)}\Big(F_2\cos(\varphi_2)\cos(\delta) + F_2\sin(\varphi_2)\sin(\delta)\Big) \\ &= \ell_2 F_2 \cos(\delta) + \ell_2 F_2 \tan(\varphi_2)\sin(\delta)\,. \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtsbedingung $M_1 + M_2 = 0$ lautet damit

$$\begin{aligned} & -\ell_1 F_1 \cos(\delta) + \ell_1 F_1 \tan(\varphi_1)\sin(\delta) + \ell_2 F_2 \cos(\delta) + \ell_2 F_2 \tan(\varphi_2)\sin(\delta) = 0 \\ \iff & (\ell_1 F_1 - \ell_2 F_2)\cos(\delta) = \big(\ell_1 F_1 \cot(\varphi_1) + \ell_2 F_2 \cot(\varphi_2)\big)\sin(\delta) \\ \iff & \ell_1 F_1 - \ell_2 F_2 = h(F_1 + F_2)\tan(\delta)\,. \end{aligned}$$

Das bedeutet: Für jede Konstellation aus ℓ_1, ℓ_2 und F_1, F_2 gibt es eine Auslenkung δ, für die ein Gleichgewicht eintritt, nämlich

$$\delta = \arctan\left(\frac{\ell_1 F_1 - \ell_2 F_2}{h(F_1 + F_2)}\right)\,.$$

Die Balkenwaage: $\ell_1 = \ell_2$

Im Fall zwei gleichlanger Wippenarme $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ (d. h. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$) entspricht unser zweiseitiger Hebel mit nach oben verschobenem Aufhängepunkt dem Prinzip der **Balkenwaage**. Hier lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$\ell(F_1 - F_2) = h(F_1 + F_2)\tan(\delta) \iff \delta = \arctan\left(\frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}\cot(\varphi)\right)\,.$$

Auch hier gibt es für jede Konstellation F_1, F_2 einen Auslenkwinkel δ für den Gleichgewicht herrscht.

Insbesondere stellt sich der Winkel $\delta = 0$ genau dann ein, wenn auch das Massengleichgewicht $F_1 = F_2$ gilt.

In diesem Fall ist die von uns weiter oben geforderte praktische Anforderung an eine Waage erfüllt.

4 Eine kurze Bemerkung zur Kraft

Wenn ein Hebel, so wie wir ihn hier behandelt haben im Gleichgewicht ist, dann meinen wir in der Regel nicht nur, dass er sich nicht um einen Punkt dreht, sondern auch, dass er sich im Ganzen nicht bewegt (genauer: beschleunigt). Das bedeutet: nicht nur das Gesamtdrehmoment verschwindet, sondern es wirkt auch keine resultierende Kraft.

Um das zu erreichen, muss es eine Kraft geben, die der aus den Hebelkräften gebildeten resultierenden Kraft entgegen wirkt. Diese greift im Auflagepunkt an. Man sagt auch, dass die Hebelkräfte über den Auflagepunkt "abgeführt werden", siehe Abb. 10.

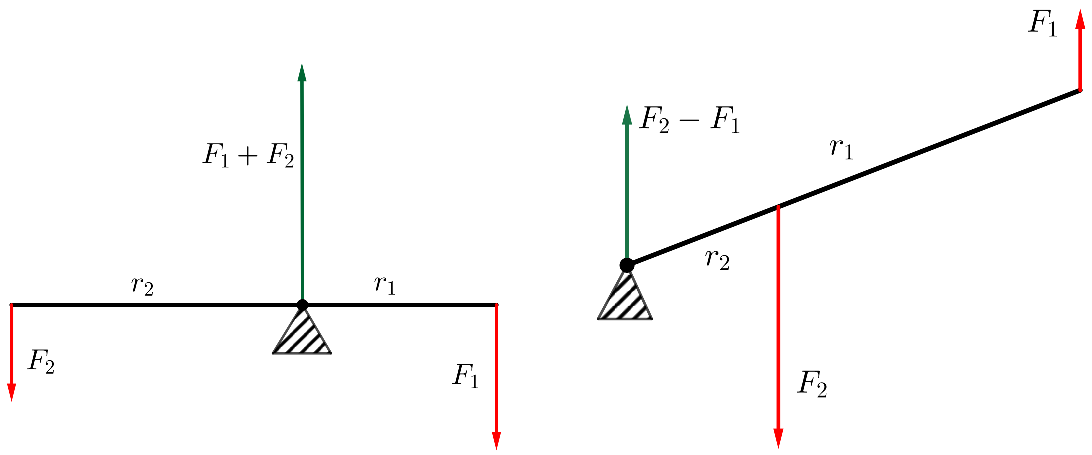


Abbildung 10: Eine kurze Bemerkung zu den Kräften