Frank Klinker

Übersicht: Die Steigung und die Normalform einer Geraden

1 Wie beschreiben wir Geraden?

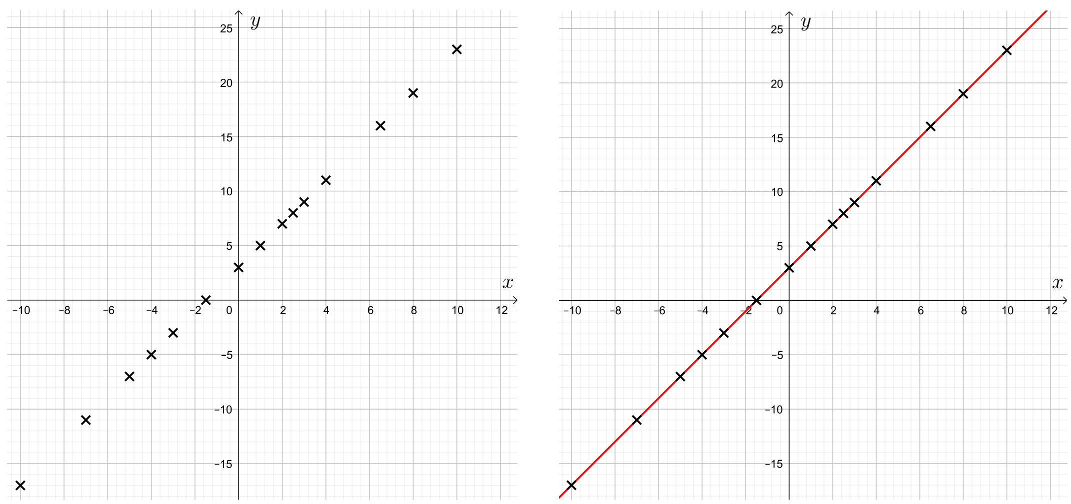
1.1 Die Darstellung von Messreihen im Koordinatensystem

Wir haben Messwerte aus Versuchen oder Werte aus Preislisten in Koordinatensysteme übertragen.

Dabei haben wir gesehen, dass sich die Punkte oft auf sehr einfach Weise miteinander verbinden ließen: alle Punkte lagen auf einer Geraden.

Das sah dann etwa so aus, wie in Abbildung 1.

Abbildung 1: Messwerte liegen auf einer Geraden



1.2 Wie wir Geraden eindeutig beschreiben können

Wir haben gesehen und uns darauf geeinigt, dass wir Geraden im Wesentlichen auf zwei verschiedene Arten beschreiben können:

1. Durch die Angabe von **zwei Punkten** ist eine Gerade festgelegt.

Punkt 1 ist geometrisch schnell klar, denn es wir wissen, dass ein Punkt nicht ausreicht, um eine Gerade zu beschreiben.

Haben wir jedoch nur einen Punkt, dann bräuchten wir zur Beschreibung einer Geraden noch die Richtung, in die sie verläuft, also:

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

2. Durch die Angabe **eines Punktes und der Richtung** ist eine Gerade festgelegt.

Als sehr einfacher Punkt hat sich der Schnittpunkt mit der y-Achse herausgestellt. Diesen ***y*-Achsenabschnitt** haben wir mit b bezeichnet.

2*. Durch die Angabe **des y-Achsenabschnitts und der Richtung** ist eine Gerade festgelegt.

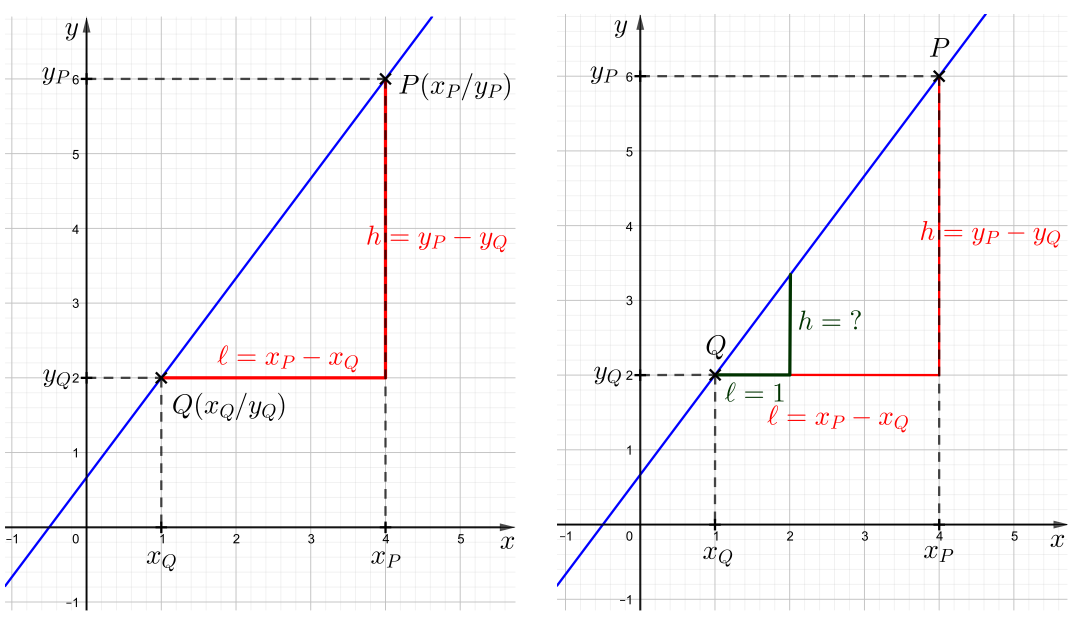
Während der y-Achsenabschnitt oft genau, aber meistens mindestens näherungsweise abgelesen werden kann, wollen wir zunächst untersuchen, wie wir die Richtung der Geraden beschreiben können.

2 Die Steigung m zur Beschreibung der Richtung einer Geraden

2.1 Das Steigungsdreieck und die Steigung m

Um die Richtung besser zu verstehen und zu beschreiben, sehen wir uns linke Grafik in Abb. 2 an.

Abbildung 2: Geraden beschreiben



- Hier sehen wir, dass zur Beschreibung der Geraden neben einem Punkt die Angabe eines rechtwinkligen Dreiecks reicht. Dessen Grundseite muss dabei auf der Geraden liegen. Solch ein Dreieck nennen wir ein **Steigungsdreieck**.
- Zur genauen Beschreibung dieses Dreiecks können wir die Länge ℓ und die Höhe h verwenden. In dem linken Beispiel in Abb. 2 ist $P(4/6)$ und $Q(1/3)$ und für die Seitenlängen des Dreiecks lesen wir $\ell = 4 - 1 = 3$ und $h = 6 - 2 = 4$ ab.

- Für die Beschreibung der Geraden benötigen wir aber gar nicht die tatsächliche Größe des Dreiecks, sondern nur seine 'Form': in der rechten Grafik in Abb. 2 ist es egal, ob wir das 'alte' rote Dreieck zur Beschreibung hernehmen oder das 'neue' grüne.

  Wenn wir uns nun generell darauf einigen, dass wir immer ein Dreieck verwenden wollen, dessen Länge genau $\ell = 1$ ist, dann reicht es, dessen entsprechende Höhe anzugeben.

- Die Höhe dieses Steigungsdreiecks der Länge $\ell = 1$ nennen wir **Steigung der Geraden**.

  Weil es in den meisten Büchern so üblich ist, bezeichnen wir die Steigung mit dem Buchstaben m.

- Aus Gründen des Maßstabs kann es schwierig sein, ein Dreieck der Länge $\ell = 1$ zu zeichnen. Wie erhalten wir aber aus einem beliebigen Steigungsdreieck die Steigung m?

  Dazu sehen wir uns in der rechten Grafik in Abb. 2 die zwei ineinander verschachtelten Dreiecke an. Der Strahlensatz[1] sagt uns nun, dass

  $$\frac{h_{\text{grün}}}{\ell_{\text{grün}}} = \frac{h_{\text{rot}}}{\ell_{\text{rot}}}\,.$$

  Setzen wir nun noch $h_{\text{grün}} = m$ und $\ell_{\text{grün}} = 1$ so ist

  $$m = \frac{h_{\text{rot}}}{\ell_{\text{rot}}}\,.$$

- Wir setzen fest, dass die Steigung m einer Geraden negativ ist, wenn die Gerade fällt.

2.2 Bestimmung der Steigung ohne Steigungsdreieck

Wir wissen, dass wir ein Steigungsdreieck einfach zeichnen können, wenn wir zwei Punkte der Geraden bereits kennen.

Das ist der Fall in der rechten Grafik in Abb. 2. Hier ist das rote Dreieck durch die zwei Punkte P und Q auf der Geraden gegeben und wir können Höhe und Länge ablesen.

Wie wir in der Grafik anber auch sehen, können wir die Höhe und die Länge des Dreieck allein mit Hilfe der beiden Punkte berechnen! Es ist nämlich h die Differenz der beiden y-Werte und ℓ die Differenz der beiden x-Werte:

$$h = y_P - y_Q, \quad \ell = x_P - x_Q\,.$$

Damit können wir Die Steigung m der Geraden durch P und Q dann allein mit Hilfe dieser beiden Punkte und ohne Skizze berechnen:

$$\boxed{m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}}$$

[1]Zum Strahlensatz siehe Wikipedia:Strahlensatz.

oder in unserem Beispiel ganz explizit

$$m = \frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}\,.$$

> Nutzt man die Formel $m = \dfrac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$ zur Berechnung der Steigung, so erhält man das Vorzeichen automatisch
>
> **ACHTUNG:** Dabei muss man genau darauf achten, dass man bei der Berechnung von h und ℓ jeweils mit dem selben Punkt beginnt!

3 Wir berechnen den y-Achsenabschnitt b und bekommen die Geradengleichung

Wie hilft uns nun die im vorigen Abschnitt berechnete Steigung dabei, den y-Achsenabschnitt b zu finden, wenn wir diesen nicht aus einem Diagramm ablesen können?

Dazu sehen wir uns das Beispiel von oben weiter an

- Wir haben bereits aus dem roten Steigungsdreieck die Steigung berechnet:

$$m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3}$$

- Wir zeichnen ein weiteres (blaues) Steigungsdreieck, dass von dem noch unbekannten y-Achsenabschnitt zu einem der beiden Punkte verläuft. Dessen Höhe und Länge ergeben sich mit dem (noch) unbekannten b zu $\ell = y_P - b = 6 - b$ und $\ell = x_P - 0 = 4$.

  Daraus kann man die Steigung bestimmen:

$$m = \frac{6-b}{4}\,.$$

- Die beiden Werte für die Steigung, die wir aus dem roten und blauen Dreieck bekommen haben, müssen gleich sein. Das gibt uns die folgende Gleichung:

$$\frac{6-b}{4} = \frac{4}{3}\,.$$

  Diese Gleichung könne wir nun nach b auflösen:

$$\begin{aligned}
\frac{6-b}{4} &= \frac{4}{3} && \Big|\cdot 4 \\
6-b &= \frac{16}{3} && \Big|+b \\
6 &= \frac{16}{3} + b && \Big|-\frac{16}{3} \\
\frac{2}{3} &= b
\end{aligned}$$

Den gleichen Wert b hätten wir auch erhalten, wenn wir statt P den Punkt Q verwendet hätten.

Mit den obigen Überlegungen können wir eine Formel herleiten, die die Steigung m, den y-Achsenabschnitt b und einen weiteren Punkt $P(x/y)$ der Geraden miteinander in Verbindung bringt.

Dazu verzichten wir darauf, im "blauen Dreieck" die Werte von P sofort einzusetzen und verwenden stattdessen (x/y). Das heißt zusammen mit m aus dem roten Dreieck bekommen wir $\frac{y-b}{x}$ aus dem blauen. Setzen wir das wieder gleich, dann bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{y-b}{x} &= m && \Big| \cdot x \\ y-b &= m \cdot x && \Big| + b \\ y &= m \cdot x + b \end{aligned}$$

Die **Normalform einer Geraden** verbindet die Steigung m, den y-Achsenabschnitt b und eien beliebigen Punkt $P(x/y)$ der Geraden miteinander. Sie lautet

$$\boxed{y = m \cdot x + b}$$

Statt von der Normalform der Geraden spricht man auch oft von der **Geradengleichung**.

4 Wichtige Beispielaufgaben und Bemerkungen zur Normalform

4.1 Testen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt

Wenn wir die Normalform einer Geraden haben, dann können wir denkbar einfach überprüfen, ob ein gegebener Punkt auf der Geraden liegt oder nicht.

Dazu müssen wir die x- und y-Komponenten des Punktes lediglich in die Normalform einsetzen und das Ergebnis überprüfen: Ist das Ergebnis wahr, dann liegt der Punkt auf der Geraden, und ist das Ergebnis falsch, dann nicht.

Als Beispiel fragen wir, ob die Punkte $A(2/18)$ und $B(-1/5)$ auf der Geraden $y = 4x + 10$ liegen:

- Wir setzen die Komponenten von A in die Normalform der Geraden ein:

  $$18 = 4 \cdot 2 + 10\,.$$

  Da das wahr ist, liegt A auf der Geraden.

- Wir setzen die Komponenten von B in die Normalform der Geraden ein:

  $$5 = 4 \cdot (-1) + 10\,.$$

  Da das falsch ist, liegt B nicht auf der Geraden.

4.2 Bestimmung der Normalform aus der Steigung und einem Punkt

Das ist genau die Aufgabe, die uns oben zur Normalform geführt hat und wir sehen uns das an einem weiteren Beispiel an.

Eine Gerade ist durch den Punkt $A(2/-4)$ und die Steigung $m = 3$ gegeben. Ihre Normalform $y = mx + b$ erhalten wir auf folgendem Weg:

- Die Steigung m haben wir, daher wissen wir bereits $y = 3x + b$. D. h. wir brauchen nur noch b zu finden.
- Wir wissen, dass der Punkt $A(2/-4)$ auf der Geraden liegen soll. Wir können die Komponenten von A also in die Normalform der Geraden einsetzen und erhalten

  $$-4 = 3 \cdot 2 + b\,.$$

  Wir lösen diese Gleichung nach b auf

  $$\begin{aligned} -4 &= 3 \cdot 2 + b \quad && |\text{vereinfachen} \\ -4 &= 6 + b && |-6 \\ -10 &= b \end{aligned}$$

Damit ist die Normalform der gesuchten Geraden

$$y = 3x - 10\,.$$

4.3 Parallele Geraden

Zwei Geraden heißen *parallel*, wenn sie sich nie schneiden.

Wenn zwei Geraden parallel sind, dann haben ihre Steigungsdreiecke immer die gleiche Form. Mit anderen Worten, die Geraden haben die gleiche Steigung m.

Wenn umgekehrt zwei Geraden die gleiche Steigung haben, so können sie parallel sein oder es handelt sich sogar um die selben Geraden, d. h. sie sind identisch.

Parallele und identische Geraden

Zur Unterscheidung, ob zwei Geraden mit gleicher Steigung identisch oder parallel sind, untersucht man sie auf gemeinsame Punkte. Dabei reicht es, folgendes zu überprüfen:

a) Wenn zwei Geraden die gleiche Steigung haben und es einen Punkt gibt, der auf der einen Geraden liegt aber nicht auf der anderen, dann sind die Geraden parallel.

b) Wenn zwei Geraden die gleiche Steigung haben und nur einen gemeinsamen Punkt, dann haben sie sofort alle Punkte gemeinsam und sind damit gleich!

Bemerkung 1. Sehr einfach sieht man das, wenn die Geraden durch ihre Normalformen gegeben sind:

a) Die Geraden sind parallel, wenn die Steigungen gleich und die y-Achsenabschnitte unterschiedlich sind

b) Die Geraden sind identisch, wenn die Steigungen und auch die y-Achsenabschnitte gleich sind (dann sind ja sogar die Normalformen insgesamt gleich!).

Beispiel 2. Die Gerade $\mathfrak{g}_1$ ist durch die Punkte $A(-1/3)$ und $B(1/7)$, die Gerade $\mathfrak{g}_2$ durch ihre Normalform $y = 2x + 4$ und $\mathfrak{g}_3$ durch den Punkt $P(-2/0)$ und die Steigung $m = 2$.

- Zunächst sieht man, dass die Gerade $\mathfrak{g}_1$ die Steigung $m = \frac{7-3}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = 2$ hat. Somit haben alle drei Geraden die gleiche Steigung.
- Der Punkt $B(-2/0)$ von $\mathfrak{g}_3$ liegt auf $\mathfrak{g}_2$, denn $0 = 2 \cdot (-2) + 4$ ist wahr. Damit sind $\mathfrak{g}_2$ und $\mathfrak{g}_3$ identisch.
- Der Punkt $A(-1/3)$ von $\mathfrak{g}_1$ liegt nicht auf $\mathfrak{g}_2$, denn $4 = 2 \cdot (-1) + 5$ ist falsch. Damit ist $\mathfrak{g}_1$ parallel zu $\mathfrak{g}_2$ (und natürlich auch zu $\mathfrak{g}_3$).