Frank Klinker

Grundaufgaben: Darstellung von Geraden und linearen Funktionen

1 Vorbemerkung: Wozu Grundaufgaben

- ▷ Die hier im Folgenden beschriebenen Grundaufgaben werden einem im Zusammenhang mit linearen Funktionen und Geraden immer über den Weg laufen, nämlich in Form konkreter Aufgaben.
- ▷ Viele Aufgaben im Zusammenhang mit Geraden und linearen Funktionen sind aber auch Textaufgaben.

  Hierbei liegt ein Hauptaugenmerk auf der Modellierung bis hin zu dem Moment, wo man tatsächlich anfangen muss zu rechnen .

  Ab diesem Punkt gibt es im Wesentlichen nur noch die Grundaufgaben, die es zu bearbeiten gibt.

2 Die Grundaufgaben

2.1 Die Grundaufgaben, ihre Lösungen und Beispiele

Grundaufgabe 1

> **Problem 1.** Eine Gerade ist durch ihre Normalform $y = mx + b$ gegeben. Prüfe, ob ein gegebener Punkt $A(x_A/y_A)$ auf der Geraden liegt.
>
> **Lösung 1.** Setze dazu den Punkt in die Normalform ein: $m \cdot x_A + b$ und berechne. Ist das Ergebnis nun gleich y_A, dann liegt der Punkt auf der Geraden, ansonsten nicht!

Beispiel 1. Liegen die Punkte $S(-1/2)$ und $T(3/-4)$ auf der Geraden $y = 2x - 10$?

Für S ist $2 \cdot (-1) - 10 = -2 - 10 = -12$ und das stimmt nicht mit 2 überein: also liegt S nicht auf der Geraden.
Für T ist $2 \cdot 3 - 10 = 6 - 10 = -4$ und das stimmt mit -4 überein: also liegt T auf der Geraden.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

Grundaufgabe 2

Problem 2. Eine Gerade ist durch zwei Punkte $P(x_P/y_P)$ und $Q(x_Q/y_Q)$ gegeben. Wie groß ist die Steigung m?

Lösung 2. Die Steigung m ist $m = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$.

Beispiel 2. Die Gerade ist durch $A(-1/2)$ und $B(9/-5)$ gegeben. Dann ist die Steigung

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-5-2}{9-(-1)} = \frac{-7}{10} = -0{,}7\,.$$

Grundaufgabe 3

Problem 3. Eine Gerade ist durch einen Punkt $A(x_A/y_A)$ und ihre Steigung m gegeben. Berechne die Normalform.

Lösung 3. Diese geschieht in zwei Schritten:

① Wir wissen dass die Normalform die Gestalt $y = mx + b$ hat, wobei nur noch b fehlt!

② Setze den Punkt A dort ein und berechne b.

Beispiel 3. Eine Gerade ist durch $P(3/-5)$ und $m = 2$ geben. Bestimme die Normalform.

Wegen $m = 2$ ist die Normalform $y = 2x + b$.
Setzen wir da den Punkt P ein, so gibt das $-5 = 2 \cdot 3 + b$ oder $-5 = 6 + b$.
Das gesuchte b ist somit $b = -11$ und wir haben die Normalform $y = 2x - 11$.

Grundaufgabe 4

Problem 4. Eine Gerade ist durch zwei Punkte $P(x_P/y_P)$ und $Q(x_Q/y_Q)$ gegeben. Bestimme die Normalform der Geraden.

Lösung 4. ① Bestimme zunächst die Steigung wie in Grundaufgabe 2.

② Dann nimm einen der gegeben Punkte und die berechnete Steigung und löse damit Grundaufgabe 3.

Beispiel 4. Bestimme die Normalform der Geraden durch $C(-1/4)$ und $E(3/-2)$.

Die Steigung ist

$$m = \frac{y_E - y_C}{x_E - x_C} = \frac{-2-4}{3-(-1)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} = -1{,}5\,.$$

Die Normalform hat damit die Gestalt $y = -1{,}5x + b$.
Wir seten C ein und erhalten $4 = -1{,}5 \cdot (-1) + b$ oder $4 = 1{,}5 + b$.
Das gesuchte b ist also $b = 2{,}5$ und die Normalform ist $y = -1{,}5x + 2{,}5$.

Grundaufgabe 5

> **Problem 5.** Gegeben sind zwei Geraden. Überprüfe ob die Geraden parallel oder sogar gleich sind.
>
> **Lösung 5.** ① Überprüfe ob die Steigungen gleich sind.
>
> ② Wenn nein: die Geraden sind nicht parallel. Wenn ja: überprüfe, ob ein Punkt der einen auf der anderen Geraden liegt.

Beispiel 5. 1. Eine Gerade verlaufe durch die Punkte $R(7/-1)$ und $Q(3/15)$. Eine zweite hat die Normalform $y = -4x + 26$. Sind die Geraden parallel oder sogar gleich?

Die Steigung der ersten Geraden ist

$$m = \frac{y_R - y_Q}{x_R - x_Q} = \frac{-1-15}{7-3} = \frac{-16}{4} = -4\,.$$

Die beiden haben die gleiche Steigung. Wir testen ob Q auf der zweiten Geraden liegt und setzen x_Q dazu in die Normalform ein: $-4 \cdot 3 + 26 = 14$ und das stimmt nicht mit y_Q überein. Damit liegt Q nicht auf der zweiten Geraden und die beiden Geraden sind parallel.

2. Sind die beiden Geraden $y = 2x + 4$ und $y = -2x + 4$ parallel oder sogar gleich?

Nein, die beiden Geraden sind nicht parallel und auch nicht gleich, da sie unterschiedliche Steigungen haben.

Grundaufgabe 6

> **Problem 6.** Bei einem Punkt $A(x_A/v)$ ist lediglich die x-Koordinate bekannt. Bestimme v so, dass der Punkt auf einer vorgegeben Geraden liegt
>
> **Lösung 6.** ① Bestimme die Normalform $y = mx + b$ der Geraden.
>
> ② Setze x_A für x und v für y in die Normalform ein. das Ergebnis ist dan v.

Beispiel 6. Gegeben ist der Punkt $C(-3/v)$. Bestimme v so, dass C auf der Geraden durch $A(1/4)$ und der Steigung $m = 2$ liegt.

Die Normalform der Geraden ist $y = 2x + b$. Setzen wir da A ein so erhalten wir $4 = 2 \cdot 1 + b$ oder $4 = 2 + b$ also $b = 2$. Die Normalform ist also $y = 2x + 2$. Setze nun ein: $v = 2 \cdot (-3) + 2 = -6 + 2 = -4$. Der gesuchte Punkt ist also $C(-3/-4)$.

Grundaufgabe 7

Problem 7. Bei einem Punkt $B(u/y_B)$ ist lediglich die y-Koordinate bekannt. Bestimme u so, dass der Punkt auf einer vorgegeben Geraden liegt

Lösung 7. ① Bestimme die Normalform $y = mx + b$ der Geraden.

② Setze y_A für y und u für x in die Normalform ein. Bestimme nun u, sodass die Gleichung korrekt ist.

Beispiel 7. Gegeben ist der Punkt $D(u/2)$. Bestimme v so, dass C auf der Geraden $y = 3x + 4$ liegt

Die Gerade liegt bereits in Normalform vor. Setze nun ein: $2 = 2 \cdot u + 4$ oder $2u = -2$ also $u = -1$. Der gesuchte Punkt ist also $D(-1/2)$.

Grundaufgabe 8

Problem 8. Berechne den Schnittpunkt einer Geraden mit der x-Achse.[1]

Lösung 8. Löse Grundaufgabe 7 für $N(u/0)$.

Beispiel 8. Bestimme die Nullstelle der Geraden durch $P = (1/4)$ und $A(-8/7)$.

Die Steigung der Geraden ist

$$m = \frac{y_A - y_P}{x_A - x_P} = \frac{7 - 4}{-8 - 1} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}\,.$$

Die Normalform hat die Gestalt $y = -\frac{1}{3}x + b$. Setzen wir da P ein so erhalten wir $4 = -\frac{1}{3} \cdot 1 + b$ oder $4 = -\frac{1}{3} + b$. Damit ist $b = 4\frac{1}{3} = \frac{13}{3}$ und die Normalform $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$.
Hier setzen wir $(u/0)$ ein: $0 = -\frac{1}{3} \cdot u + \frac{13}{3} = \frac{-u+13}{3}$. Damit ist $u = 13$ die gesuchte Nullstelle.

Grundaufgabe 9

Problem 9. Bestimmen Sie den Schnittpunkt zweier Geraden.

Lösung 9. ① Berechne zuerst die Normalformen der beiden Geraden $y = m_1x + b_1$ und $y = m_2x + b_2$.

② Bestimme ein x mit $m_1x + b_1 = m_2x + b_2$.

③ Das so gewonnene x setze in eine der Geraden ein, um y zu berechnen.

④ Die beiden Werte x und y ergeben dann zusammen den Schnittpunkt $S(x/y)$.

Beispiel 9. Bestimme den Schnittpunkt der Geraden $y = x + 4$ und $y = 2x + 1$.

Da beide bereits in Normalform vorliegen können wir direkt zum zweiten Punkt übergehen: Bestimme x, sodass $x + 4 = 2x + 1$. Die Lösung hier ist $x = 3$ und das setzen wir in die zweite Gerade ein: $y = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. Damit ist der Schnittpunkt $S(3/7)$.

Bemerkung 1 (Zu den Grundaufgaben)**.** Man sieht bereits bei den Grundaufgaben, dass diese nicht 'allein' stehen, sondern in der Regel aufeinander aufbauen.

2.2 Systematisches Lösen der 9. Grundaufgabe

Zum Bearbeiten der Grundaufgabe 9 muss man in Schritt ② ein x finden, sodass die Gleichung

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2$$

korrekt ist. Oft kann man dieses x durch 'scharfes Hinsehen' finden (so etwa in unserem Beispiel). Aber wie ist es etwa bei

$$\tfrac{3}{7}x - 2{,}4 = -1{,}3x + \tfrac{134}{1023}\,.$$

Hier kann man das korrekte x sicher nicht 'sehen' und wir müssen uns etwas anderes einfallen lassen.

Die Idee ist hierbei das Verändern beider Seiten der Gleichung, ohne die Gleichheit insgesamt zu zu stören. Das heißt: immer, wenn wir auf der einen Seite der Gleichung etwas tun, dann müssen wir das auch auf der anderen machen. Das ganze geschieht immer mit dem Ziel, das Problem insgesamt zu vereinfachen.

Verwenden werden wir lediglich folgende zwei 'Veränderungen':

1. Wir addieren oder subtrahieren auf beiden Seiten der Gleichung jeweils den gleichen Term

2. Wir dividieren oder multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit der gleichen Zahl

Das genaue Vorgehen ist wie folgt:

- Mache Schritt 1 solange bis "alles , was mit x zusammenhängt" auf der einen Seite der Gleichung steht, und "alles was kein x hat", auf der anderen
- Mache Schritt 2 einmal, indem du durch den Faktor vor dem x teilst (eventuell entfällt dieser Schritt, wenn der Faktor bereits 1 ist).

Was wir in dem jeweiligen Schritt machen, schreiben wir in jedem Schritt daneben:

Beispiel 10. a) $x + 4 = 2x + 1$

$$\begin{aligned} x + 4 &= 2x + 1 && \big\vert -x \\ x + 4 - x &= 2x + 1 - x \\ 4 &= x + 1 && \big\vert -1 \\ 3 &= x \end{aligned}$$

b) $4x + 2 = -4x - 30$

$$\begin{aligned} 4x + 2 &= -4x - 30 && \big\vert +30 \\ 4x + 2 + 30 &= -4x - 30 + 30 \\ 4x + 32 &= -4x && \big\vert -4x \\ 4x + 32 - 4x &= -4x - 4x \\ 32 &= -8x && \big\vert : (-8) \\ 32 : (-8) &= -8x : (-8) \\ -4 &= x \end{aligned}$$

c) $10x - 3 = 5x + 6$

$$\begin{aligned} 10x - 3 &= 5x + 6 && \big\vert -5x \\ 10x - 3 - 5x &= 5x + 6 - 5x \\ 5x - 3 &= 6 && \big\vert +3 \\ 5x - 3 + 3 &= 6 + 3 \\ 5x &= 9 && \big\vert : 5 \\ x &= \frac{9}{5} = 1{,}4 \end{aligned}$$

d) $\frac{3}{7}x - 2{,}4 = -1{,}3x + \frac{134}{1023}$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{7}x - 2{,}4 &= -1{,}3x + \frac{134}{1023} && \Big| - \frac{3}{7}x \\
\frac{3}{7}x - 2{,}4 - \frac{3}{7}x &= -1{,}3x + \frac{134}{1023} - \frac{3}{7}x \\
-2{,}4 &= -\frac{121}{70}x + \frac{134}{1023} && \Big| - \frac{134}{1023} \\
-2{,}4 - \frac{134}{1023} &= -\frac{121}{70}x + \frac{134}{1023} - \frac{134}{1023} \\
-\frac{12946}{5115} &= -\frac{121}{70}x && \Big| : \frac{121}{70} \\
-\frac{12946}{5115} : \frac{121}{70} &= -\frac{121}{70}x : \frac{121}{70} \\
-\frac{181244}{123783} &= x
\end{aligned}$$

e) $m_1x + b_1 = m_2x + b_2$

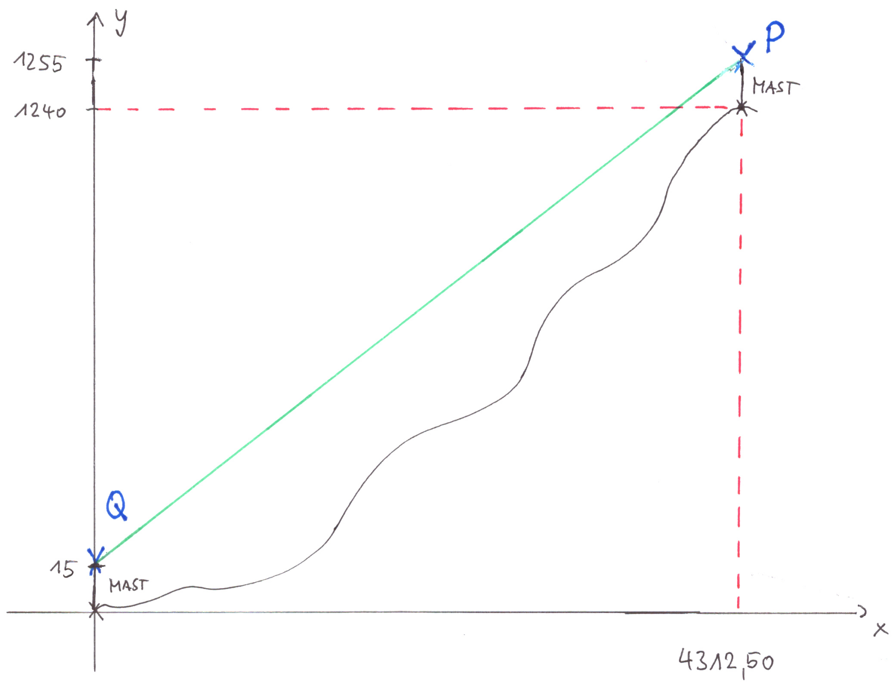
$$\begin{aligned}
m_1x + b_1 &= m_2x + b_2 && | - m_2x \\
m_1x + b_1 - m_2x &= m_2x + b_2 - m_2x \\
m_1x + m_2x + b_1 &= b_2 && | - b_1 \\
m_1x - m_2x + b_1 - b_1 &= b_2 - b_1 \\
m_1x - m_2x &= b_2 - b_1 \\
(m_1 - m_2)x &= b_2 - b_1 && | : (m_1 - m_2) \\
(m_1 - m_2)x : (m_1 - m_2) &= (b_2 - b_1) : (m_1 - m_2) \\
x &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}
\end{aligned}$$

3 Beispiele: Textaufgaben

Beispiel 11. Zum Befahren eines Berges soll eine Seilbahn gebaut werden, die im Tal beginnt. Der Berg ist $1240\,m$ hoch. Die waagerechte Entfernung zwischen Bergspitze und Tal ist $4312{,}5\,m$. Die Höhe der Masten der Seilbahn im Tal und auf der Spitze sind $15\,m$. Die Masten dazwischen sind so hoch, dass das Seil der Seilbahn ist eine Gerade beschreibt, wenn es gespannt.

Gib die Normalform der Geraden an. Wähle dazu das Koordinatensystem so, dass der Ursprung des Systems im Tal liegt.

Lösung. Wir machen zunächst eine Skizze:



(Es handelt sich hier um Grundaufgabe 3)

Die Steigung der Geraden ergibt sich mit Hilfe der Punkte $Q(0/15)$ und $P(4312{,}5/1255)$ zu

$$m = \frac{y_P = y_Q}{x_P = x_Q} = \frac{1255 - 15}{4312{,}5 - 0} \approx 0{,}2875$$

Den y-Achsenabschnitt lesen wir direkt ab: $b = 15$.

Damit haben wir als Geradengleichung

$$y = 0{,}2875x + 15\,.$$