Frank Klinker

Physikalische Größen

Teil 1: Größen, Einheiten und wie man mit ihnen rechnet

1 Die Definition der Größe

Um sich miteinander zu unterhalten reicht es oft nicht, lediglich eine Zahl zur Beschreibung einer Eigenschaft zu nutzen:

- Lautet die Frage: "Wie weit ist es von hier bis zum nächsten Supermarkt?", so ist die Antwort "1500" ebenso wenig hilfreich, wie die genauso korrekte Antwort "1,5".
- Eine andere Frage lautet: " Wie hoch ist die Miete für dieses Appartement?", so ist die Antwort "550" nicht hilfreich und die Antwort '4510" genauso wenig, auch wenn beide korrekt sind.

Wir sehen sofort was uns bei den Antworten stört - es fehlt die Einheit mit der man die angegebenen Werte gemessen hat:

$1500\,m$ oder $1{,}5\,m$ im ersten Fall und 550 € oder 4510 TL im zweiten Fall.

> Eine **Größe** besteht immer aus einer Zahl - dem **Wert** - und einer **Einheit**.
>
> Jede Größe hat ein Größensymbol, z. B. G, und die zugehörige Einheit besitzt ein Einheitensymbol, z. B. E.
>
> Ist zusätzlich der Wert der Größe die Zahl 317, so schreiben wir
>
> $$G = 317\,E\,.$$
>
> Wenn wir sagen wollen "die Größe G hat die Einheit E", dann schreiben wir
>
> $$[G] = E\,.$$

Beispiel 1. Wir stecken eine Strecke ab. Die Länge der Strecke nennen wir s (das Größensymbol). Mir messen in der Einheit cm, also

$$[s] = cm\,.$$

Außerdem messen wir den Zahlenwert 450 und erhalten damit

$$s = 450\,cm\,.$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 27. September 2024

2 Erste Beispiele und Eigenschaften

Beispiel 2. 1. Die im Alltag verwendete elektrische Spannung unseres Stromnetzes misst man in der Einheit V (Volt) und sie beträgt $220\,V$.
Hierbei ist 220 der Wert der Größe und V die Einheit.

2. Ein noch alltäglicheres Beispiel ist die Geldmenge. Diese misst man bei uns in € (Euro) und ct (Cent).
Z. B. $4\,€ = 400\,ct$: Hier sind 4 und 400 die jeweiligen Werte und € und ct die Einheiten

3. Weiter bekannte Größen mit denen wir uns im Alltag beschäftigen sind z. B.

- Die **Länge** hat z. B. die Einheit km (Kilometer), yd (Yard), m (Meter), dm (Dezimeter), in (Inch/Zoll), cm (Zentimeter), mm (Millimeter), μm (Mikrometer), nm (Nanometer), ly (Lichtjahr) oder pc (Parsec)
- Der **Geldbetrag** hat z. B. die Einheit € (Euro), ct (Cent), \$ (US-Dollar), TL (Türkische Lira) oder CHF (Schweizer Franken)
- Die **Masse** hat z. B. die Einheit t (Tonne), kg (Kilogramm), g (Gramm), mg (Milligramm) oder pg (Pikogramm)
- Die **Fläche** hat z. B. die Einheit km^2 (Quadratkilometer), ha (Hektar), a (Ar), m^2 (Meter), $sqft$ (Quadratfuß), dm^2 (Quadratdezimeter), cm^2 (Quadratzentimeter), mm^2 (Quadratmillimeter)
- Das **Volumen** hat z. B. die Einheit km^3 (Kubikkilometer), m^3 (Kubikmeter), $h\ell$ (Hektoliter), dm^3 (Kubikdezimeter), ℓ (Liter), $cuin$ (Kubikzoll), cm^3 (Kubikzentimeter), $m\ell$ (Milliliter) oder mm^3 (Kubikmillimeter)
- Die **Zeit** hat z. B. die Einheit s (Sekunde), min (Minute), h (Stunde) oder yr (Jahr)

Mit Hilfe dieser ersten Beispiele können wir bereits einige wichtige Eigenschaften von Größen erkennen:

Bemerkung 3 (Eigenschaften von Größen)**.**

1. Eine Größe kann durch verschiedene Einheiten beschrieben werden. Einigt man sich auf eine Einheit, so reicht der Wert zur vollständigen Beschreibung der Größe.

2. Verschiedene Einheiten lassen sich mit Hilfe fester Umrechnungsfaktoren umrechnen.[1] Z. B.

$$\begin{aligned} 1\,€ &= 8{,}2\,TL \\ 1\,h &= 60\,min \\ 1\,min &= 60\,s \end{aligned}$$

[1] Die Einheit der Geldmenge bildet hier eine Ausnahme, da ihr Umrechnungsfaktor (Kurs) von Schwankungen geprägt ist.

$$
\begin{aligned}
1\,h &= 3600\,s\\
1\,ft &= 0{,}3048\,m\\
1\,m &= \tfrac{1250}{381}\,ft \approx 3{,}2808\,ft\\
1\,sqft &= 0{,}09290304\,m^2\\
1\,m^2 &= \frac{1562500}{145161}\,sqft \approx 10{,}7639\,sqft\\
1\,km &= 1000\,m\\
1\,m &= 100\,cm\\
1\,km &= 100000\,cm\\
1\,cm &= 0{,}00001\,km
\end{aligned}
$$

3. Die selbe Größe kann durch verschiedene Werte und Einheiten beschrieben werden. Z. B.

$$
\begin{aligned}
550\,€ &= 5410\,TL\\
3\,dm^3 &= 3\,\ell\\
32\,m &= 0,032\,km\\
32\,m &\approx 1259{,}8425\,in\\
20m^2 &\approx 215{,}2782\,sqft
\end{aligned}
$$

   Zum Umrechnen verwendet man die Umrechnungsfaktoren wie in Punkt 2. Z. B.

$$
\begin{aligned}
550\,€ &= 550 \cdot 8{,}2\,TL = 5410\,TL\\
20\,m^2 &= 20 \cdot \frac{1562500}{145161}\,sqft \approx 215{,}2782\,sqft
\end{aligned}
$$

4. Manche Größen lassen sich aus anderen zusammensetzen: Die Fläche ist das Produkt aus zwei Längen und das Volumen ist das Produkt aus drei Längen. Damit sind die Einheit auch zusammengesetzt, z. B.

$$
\begin{aligned}
m^2 &= m \cdot m\\
dm^2 &= dm \cdot dm\\
mm^3 &= mm \cdot mm \cdot mm\\
dm^3 &= dm \cdot dm \cdot dm
\end{aligned}
$$

5. Zusammengesetzte aber ständig benutzte (oder wichtige) Größen können eigene neue Einheiten bekommen. Z. B.

$$
\begin{aligned}
1\,\ell &= 1\,dm^3\\
1\,N &= 1\frac{kg\,m}{s^2}
\end{aligned}
$$

6. Einige Einheiten lassen sich durch eine Vorsilbe systematisch "verkleinern" oder vergrößern".

Systematisch meint hier, dass der Umrechnungsfaktor beim Umrechnen zugehöriger Größen immer eine feste Zehnerpotenz ist.

$$\begin{aligned} 1\,cm &= 0{,}1\,dm \\ 1\,dm &= 10\,cm \\ 1\,km &= 1000\,m \\ 1\,m\ell &= 0{,}001\,\ell \\ 1\,h\ell &= 100\,\ell \end{aligned}$$

3 Rechnen mit Größen

Regeln zum Rechnen mit Größen (1)

- Man kann Größen addieren oder subtrahieren, wenn sie die gleichen Einheiten haben.
- Man kann Größen mit Zahlen multiplizieren und durch Zahlen teilen.

Beispiel 4.

$$\begin{aligned} &1\,€ + 3\,€ = 4\,€ && 23\,cm - 2\,cm = 21\,cm \\ &300\,ct - 50\,ct = 250\,ct && 4\,mg + 34\,mg = 38\,mg \\ &4\,€ \cdot 7 = 28\,€ && 80\,m : 10 = 8\,m \\ &420\,ct : 21 = 20\,ct && 12\,kg \cdot 3 = 36\,kg \end{aligned}$$

Wir können auch Größen mit unterschiedlichen Einheiten addieren und subtrahieren, wenn sie "zusammenpassen":

- Die Größen $2\,kg$ und $4\,m$ kann man nicht addieren oder subtrahieren, da sie nicht zusammenpassen: die eine beschreibt eine Masse und die andere eine Länge.
- Wir können die Geldbeträge $3\,€$ und $25\,ct$ zusammenrechnen und bekommen $3{,}25\,€$.
- Wir können von der Länge $2\,m$ die Länge $50\,cm$ abziehen und bekommen $150\,cm$.

Regeln zum Rechnen mit Größen (2)

Bevor wir zusammenpassende Größen addieren oder subtrahieren können, müssen wir sie zunächst auf die **gleiche Einheit** bringen.

Beispiel 5. • Wir haben im vorigen Beispiel 3 € und 25 ct zusammengerechnet und 3,25 € erhalten. Gerechnet haben wir so:

25 ct sind 0,25 €. Zusammen mit 3,00 € sind das 3,25 €
oder
3 € sind 300 ct. Zusammen mit 25 ct sind das 325 ct oder 3,25 €.

• Im gleichen Beispiel haben wir 50 cm von 2 m abgezogen und 150 cm erhalten. Eigentlich sind wir wie folgt vorgegangen:

50 cm sind 0,5 m. Ziehen wir das von 2,00 m ab, sind das 1,5 m
oder
2 m sind 200 cm. Abzüglich 50 cm sind das 150 cm oder 1,5 m.

Regeln zum Rechnen mit Größen (3)

Wir können zwei Größen miteinander multiplizieren oder dividieren.

Das Ergebnis ist eine neue Größe:

- ihr Wert ist das Produkt oder der Quotient der Werte der Ausgangsgrößen
- ihre Einheit ist das Produkt oder der Quotient der Einheiten der Ausgangsgrößen

Beispiel 6. 1. Das Produkt aus zwei Längen ist eine Fläche:

$$(4\,m) \cdot (3\,m) = 4 \cdot 3\,m \cdot m = 12\,m^2$$

2. Der Quotient aus einer Geldmenge und einer Fläche ist der Flächenpreis:

$$(240\,€) : (4\,m^2) = \frac{240\,€}{4\,m^2} = \frac{240}{4}\,\frac{€}{m^2} = 60\,\frac{€}{m^2}$$

3. Die Geschwindigkeit ist der Quotient aus einer Länge und einer Zeit:

$$(20m) : (4\,s) = \frac{20\,m}{4\,s} = \frac{20}{4}\,\frac{m}{s} = 5\,\frac{m}{s}$$

4. Die Niederschlagsmenge ist der Quotient aus Volumen und Fläche:

$$(20\,\ell) : (1\,m^2) = \frac{20}{1}\,\frac{\ell}{m^2} = 20\,\frac{\ell}{m^2}$$

Nun wissen wir: $1\ell = 1\,dm^3 = 1 \cdot (100\,mm)^3 = 1000000\,mm^3$ und $1\,m^2 = 1 \cdot (1000\,mm)^2 = 1000000\,mm^2$. Damit erhalten wir als Niederschlagsmenge

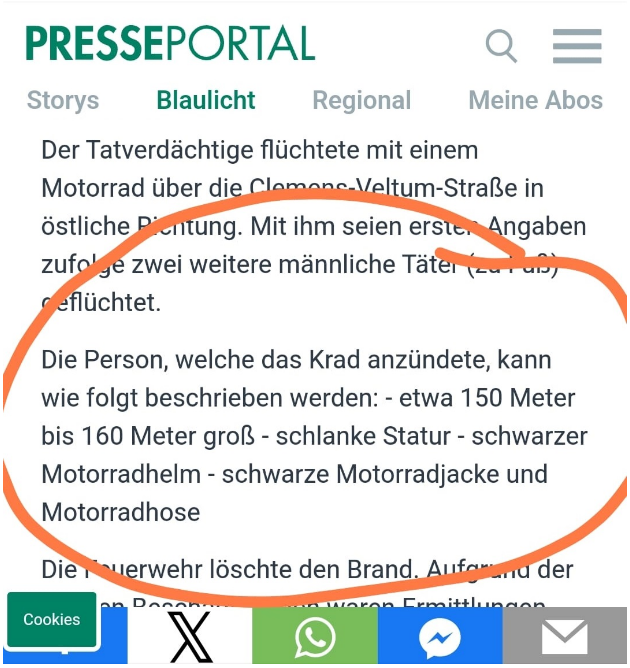
$$20\,\frac{\ell}{m^2} = 20\,\frac{dm^3}{m^2} = 20\,\frac{\frac{1}{1000}m^3}{m^2} = 20 \cdot \frac{1}{1000}m = 20\,mm$$

Das Beispiel 6.4 zeigt uns, dass man verschiedene Größen mit der gleichen Einheit beschreiben kann: dort die Länge und die Niederschlagsmenge.

4 Die Maßvorsätze

Wir haben bereits gesehen und kennen es aus der Alltagssprache, dass wir Einheiten umrechnen können. Das tun wir etwa um Werte miteinander vergleichen zu können.

Warum die korrekte Einheit wichtig ist
(aus einem Polizeibericht vom 18.09.2024)



Wenn der Wert einer Größe groß oder klein ist, dann wählen wir oft eine "größere" oder "kleinere" Einheit, indem wir der Einheit eine Vorsilbe geben, z. B.

$$\text{Statt } 200000\,cm \text{ sagen wir } 2000\,m \text{ oder } 2\,km$$
$$\text{Statt } 0{,}0000025\,km \text{ sagen wir } 0{,}0025\,m \text{ oder } 2{,}5\,mm$$

Ein wichtiges Instrument, um Größen vergleichbar zu machen ist die Potenzschreibweise. In dieser Potenzschreibweise lassen sich zwei Zahlen besonders leicht miteinander vergleichen:

Die Zahl mit dem größeren Exponenten ist die größere Zahl.

Beispiel 7.

a) Der Mond besitzt eine Masse von $m_M \approx 73460000000000000000000\,kg$ und die Erde eine von $m_E \approx 5972000000000000000000000\,kg$. Dass nun tatsächlich $m_E > m_M$ ist, sieht man in der Potenzschreibweise leichter:
$$m_M = 7{,}346 \cdot 10^{22}\,kg \quad \text{und} \quad m_E \approx 5,972 \cdot 10^{24}\,kg\,.$$

b) Ein Elektron hat die Masse $m_e \approx 0{,}000000000000000000000000000000911\,kg$ und ein Proton die Masse $m_p \approx 0{,}00000000000000000000000000101\,kg$. Dass nun wirklich $m_e < m_p$ ist, sieht man auch wieder sehr gut in der Potenzschreibweise:
$$m_p \approx 1{,}01 \cdot 10^{-27}\,kg \quad \text{und} \quad m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg\,.$$

Diese Zehnerpotenzen kürzt man nun mit Hilfe von Vorsilben ab, die so genannten **Maßvorsätze** oder **Präfixe**. Man kann sie im Zusammenhang mit fast alle Einheiten verwenden, die ein eigenes Symbol besitzen.

Die Umrechnung geschieht dann mit Hilfe von Potenzen von 10 (durch Multiplikation oder Division). In der folgenden Skizze ist das für die Einheit N notiert, wobei diese aber durch jede andere ersetzt werden kann, z. B. m oder g

Die wichtigsten **Maßvorsätze**: Umrechnungsfaktoren und Namen

$$\begin{tikzcd}
\boxed{MN} \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{kN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{N} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & \boxed{dN} \arrow[l, bend right, ":10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & \boxed{cN} \arrow[l, bend right, ":10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & \boxed{mN} \arrow[l, bend right, ":10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{\mu N} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{nN} \arrow[l, bend right, ":1000"']
\end{tikzcd}$$

Maßvorsatz	M	k	–	d	c	m	μ	n
Zehnerpotenz	10^6	10^3	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
Name	Mega	Kilo	–	Dezi	Zenti	Milli	Mikro	Nano

Beispiel 8 (Rechenhilfen).

1. Wenn man von kN in cN umrechnen will, dann kann man in einem Schritt mit $1000 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$ multiplizieren, statt nacheinander mit 1000, dann mit 10 und dann nochmal mit 10:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{kN} \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] \arrow[rrr, bend right=40, "\cdot 100000"'] & \boxed{N} \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & \boxed{dN} \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & \boxed{cN}
\end{tikzcd}$$

   Z. B.

$$0{,}0004697\,kN = 0{,}0004697 \cdot 100000\,cN = 46{,}97\,cN$$

2. Wenn man von μm in m umrechnen will, dann kann man in einem Schritt durch $1000 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000000$ teilen, statt nacheinander durch 1000, durch 10, durch 10 und nochmal durch 10.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{m} & \boxed{dm} \arrow[l, bend right, ":10"'] & \boxed{cm} \arrow[l, bend right, ":10"'] & \boxed{mm} \arrow[l, bend right, ":10"'] & \boxed{\mu m} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[llll, bend right=40, ":1000000"']
\end{tikzcd}$$

   Z. B.

$$83500000\,\mu m = 83500000 \cdot \frac{1}{1000000}\,m = 83{,}5\,m$$

Hier sieht man ganz gut, dass sich die Exponentialschreibweise anbietet, wobei $83500000 = 8{,}35 \cdot 10^7$ und $\frac{1}{1000000} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$:

$$8{,}35 \cdot 10^7 \mu m = 8{,}35 \cdot 10^7 \cdot 10^{-6}\, m = 8{,}35 \cdot 10^1\, m = 83{,}5\, m$$

Exkurs 9. Der Vollständigkeit halber führen wir hier noch weitere Maßvorsätze auf.
Zwei werden zwischen der Grundeinheit und dem Kilo eingefügt, alle anderen liefern weitere Vergrößerungen und Verkleinerungen:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{QN} \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{RN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{YN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{ZN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{EN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{PN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{TN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{GN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{MN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{kN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & \boxed{hN} \arrow[l, bend right, ":10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & \boxed{daN} \arrow[l, bend right, ":10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & \boxed{N} \arrow[l, bend right, ":10"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{N} \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & \boxed{dN} \arrow[l, bend right, ":10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & \boxed{cN} \arrow[l, bend right, ":10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & \boxed{mN} \arrow[l, bend right, ":10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{\mu N} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{nN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{pN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{fN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{aN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{zN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{yN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{rN} \arrow[l, bend right, ":1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{qN} \arrow[l, bend right, ":1000"']
\end{tikzcd}$$

Maßvorsatz	Q	R	Y	Z	E	P	T	G	M	k	h	da
Faktor	10^{30}	10^{27}	10^{24}	10^{21}	10^{18}	10^{15}	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1
Name	Quetta	Ronna	Yotta	Zetta	Exa	Peta	Tera	Giga	Mega	Kilo	Hekto	Deka

Maßvorsatz	d	c	m	μ	n	p	f	a	z	y	r	q
Faktor	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{24}	10^{-27}	10^{30}
Name	Dezi	Zenti	Milli	Mikro	Nano	Piko	Fempto	Atto	Zepto	Yokto	Ronto	Quekto