Frank Klinker

Physikalische Größen

Teil 2: Basisgrößen, zusammengesetzte Größen und die Dimensionsanalyse

1 Basisgrößen

Alle bisherigen Größen[1] werden uns auch weiter interessieren und wir nennen sie genauer **physikalische Größen**. Im Unterricht werden wir eine Menge weitere kennen lernen. Einige davon diskutieren wir in den nächsten Abschnitten.

Wir haben bereits gesehen, dass man aus bekannten Größen durch Multiplikation und Division neue Größen erhalten kann.

Somit ist es interessant zu wissen, welche denn "elementar" sind, also sich nicht zusammensetzen lassen.

Das lässt sich nicht eindeutig beantworten. Wie wir in einem vorigen Beispiel bereits gesehen haben, ist die Geschwindigkeit aus Länge und Zeit zusammengesetzt. Wenn man Länge und Zeit als "elementar" ansieht, so kann man sagen, die Geschwindigkeit ist nicht "elementar". Wählt man aber die Geschwindigkeit und die Länge als "elementar", so ist die Zeit aus diesen zusammengesetzt und nicht mehr "elementar".

Unabhängig, welche Größen als "elementar" gewählt wird, sollte deren Anzahl möglichst klein sein. Hat man sich z. B. für die Länge als "elementar" entschieden, dann nimmt man die Fläche nicht mehr zu den "elementaren" Größen hinzu.

Wir beginnen damit die "elementaren" Größen im Sinne des internationalen Einheitensystems SI aufzulisten.[2] Diese Größen heißen im folgenden **(physikalische) Basisgrößen**.

Bemerkung 1.

- Mit Ausnahme der Basiseinheit der Masse lassen sich die Basiseinheiten der Basisgrößen prinzipiell mit Präfixen versehen.
- Die Basiseinheit der Masse besitzt selbst schon das Präfix k (Kilo-) und zur Verwendung der Präfixe muss man von g ausgehen.
- Weiter Ausnahmen:
  - Bei der Einheit der Temperatur werden keine Präfixe verwendet.
  - Bei der Sekunde werden lediglich die verkleinernden Präfixe benutzt, z. B. μs. Zur Vergrößerung verwendet man gegebenenfalls die Minute min, die Stunde

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 1. September 2023

[1] Bis auf den Geldbetrag, der ab jetzt herausfällt.
[2] Siehe https://www.bipm.org/en/measurement-units/.

Tabelle 1: Die physikalischen Basisgrößen

Basisgröße	**Größensymbol**	**Basiseinheit**	**Einheitensymbol**
Zeit	t	Sekunde	s
Länge	$l, s, x, r, ...$	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Stromstärke	I, i	Ampère	A
Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichtstärke	I_V	Candela	cd

h, den Tag d oder das Jahr yr (auch a). Bei diesen sind Präfixe in der Regel nicht vorgesehen[3].

Exkurs 2. Eine moderne physikalische Sichtweise verzichtetet auf die Unterscheidung zwischen Basisigröße und zusammengesetzte Größe. Vielmehr bilden sieben physikalische Konstanten die Grundlage für die Beschreibung aller physikalischen Größen gleichermaßen. Diese sieben Konstanten sind jedoch jede einzelne eng verknüpft mit einer der Baisgrößen aus Tabelle 1. Dies kann mitunter sehr kompliziert sein. Bis auf Sekunde und Mol hängen die Festlegungen der Grundgr ößen von anderen Grundgrößen ab. Z. B.

- Eine Sekunde ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der Strahlung, die dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entspricht.
- Ein Mol eines Stoffes enthält genau 602214076 000000 000000 000000 Teilchen.
- Ein Meter ist der Weg, den das Licht in der Zeit $\frac{1}{299792458}\,s$ zurücklegt (wir benötigen die Sekunde)
- Das Kilogramm ist dadurch festgelegt, dass man der Planck-Konstante h den Zahlenwert $6{,}62607015 \cdot 10^{-34}$ und die Einheit $\frac{kg\,m}{s}$ zuordnet (wir benötigen Sekunde und Meter)

2 Zusammengesetzte Größen

Jede physikalische Größe, die keine Basisgröße ist, ist eine zusammengesetzte Größe:

[3] In einigen Wissenschaftsbereichen, bei denen große Zeitspannen eine Rolle spielen, gibt es auch die vergrößerten Varianten kyr, Myr oder Gyr des Jahres.

Eine **zusammengesetzte Größe** ist eine physikalische Größe, die keine Basisgröße ist.

Wir erhalten zusammengesetzte Größen durch Multiplikation und Division gegebener Größen.

Beispiel 3. 1. Die *Fläche* A ist das Produkt aus zwei Längen a und b mit jeweils den Einheiten m. Die Einheit von A ist damit

$$[A] = m \cdot m = m^2$$

2. Die *Geschwindigkeit* v ist der Quotient aus einer Strecke s und der Zeit t. Mit $[s] = m$ und $[t] = s$ ist die Einheit der Geschwindigkeit

$$[v] = \frac{m}{s}$$

3. Die *Beschleunigung* a ist der Quotient aus einer Geschwindigkeit s und der Zeit t. Mit $[v] = \frac{m}{s}$ und $[t] = s$ ist die Einheit der Beschleunigung

$$[a] = \frac{\frac{m}{s}}{s} = \frac{m}{s^2}$$

4. Die *Energie* E ist zusammengesetzt als Produkt aus Beschleunigung, Masse und Strecke. Damit ist

$$[E] = \frac{m}{s^2} \cdot kg \cdot m = \frac{kg\, m^2}{s^2}$$

Von allen denkbaren zusammengesetzten Einheiten haben 22 ein eigenes Einheitensymbol[4]. Die elf ersten aus der Tabelle 2 werden wir im Laufe des Unterrichts näher kennenlernen, einige weitere werden wir nur anschneiden.

3 Dimension einer Größe und Dimensionsanalyse

Bemerkung 4. Wir heben bereits an einem Beispiel gesehen, dass zwei unterschiedliche Größen die gleiche Einheit besitzen können: dabei handelte es sich die *Länge* und die *Niederschlagsmenge*, die beide in mm gemessen werden können.

Lassen sich zwei unterschiedliche Größen mit der gleichen Einheit beschreiben, dann sagen wir, dass die beiden Größen die gleiche **Dimension** haben.

Der Begriff der Dimension ist bestens dazu geeignet zu überprüfen, ob eine vorgegebene Größe verwendet werden kann kann, um eine gesuchte Größe zu beschreiben.

[4] Siehe https://www.bipm.org/utils/common/pdf/si-brochure/SI-Brochure-9-EN.pdf

Beispiel 5. Wir wissen, dass der *Druck* p als Größe der Quotient aus *Kraft* F und *Fläche* A ist. Kann dann das Produkt aus *Druck* p und *Volumen* V die Größe *Energie* E ergeben, also

$$E = p \cdot V\,?$$

Wir sehen uns die Einheitengleichung an:

$$[E] = [p \cdot V] \iff [E] = [p] \cdot [V] \iff J = \frac{N}{m^2} \cdot m^3$$

Weiter können wir verwenden, dass die Einheit der *Arbeit* E

$$[E] = J = \frac{kg\,m^2}{s^2}$$

ist. Ebenso wissen wir für die Einheit der *Kraft*:

$$N = \frac{kg\,m}{s^2}\,.$$

Damit wird dir obige Einheitengleichung zu

$$\frac{kg\,m^2}{s^2} = \frac{\frac{kg\,m}{s^2}}{m^2} \cdot m^3 \iff \frac{kg\,m^2}{s^2} = \frac{kg\,m}{s^2} \cdot m \iff \frac{kg\,m^2}{s^2} = \frac{kg\,m^2}{s^2}$$

Somit haben $p \cdot V$ und E die gleiche Dimension und wir können nicht ausschließen, dass das Produkt $p \cdot V$ eine *Energie* gibt.

Beispiel 6. Durch einiges Umformen haben wir für die Gesamtenergie eines Systems die folgende Formel gefunden. Dabei ist g eine Beschleunigung, h und r sind Längen und alle anderen Größen haben ihre Standardsymbole:

$$E = UIt + 2\pi^2 m r^2 f^2 + gh\,.$$

Kann die Formel korrekt sein?
Die kann höchstens korrekt sein, wenn alle Summanden die gleiche Dimension haben, und zwar die der Energie. Wir wissen

$$[E] = J = \frac{kg\,m^2}{s^2}\,.$$

Es ist $[U] = V = \frac{kg\,m^2}{s^3 A}$, $[I] = A$ und $[t] = s$. Damit gilt für den ersten Summanden

$$[UIt] = [U][I][t] = \frac{kg\,m^2}{s^3 A} \cdot A \cdot s = \frac{kg\,m^2}{s^2} = J$$

Weiter ist $[m] = kg$, $[r] = m$ und $[f] = \frac{1}{s}$. Außerdem hat $2\pi^2$ als reine Zahl keine Einheit. Deshalb gilt für den zweiten Summanden

$$[2\pi^2 m r^2 f^2] = [m][r]^2[f]^2 = kg \cdot m^2 \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^2 = \frac{kg\,m^2}{s^2} = J\,.$$

Für die Erdbeschleunigung g gilt $[g] = \frac{m}{s^2}$ und weiter ist $[h] = m$. Das gibt für den letzten Summanden

$$[gh] = [g][h] = \frac{m}{s^2} \cdot m = \frac{m^2}{s^2} \neq J\,.$$

Damit ist die Formel nicht korrekt, da der letzte Summand nicht die Dimension Energie hat.
Mutmaßlich haben wir im letzten Summanden die Masse vergessen und die korrekte Formel könnte wie folgt aussehen:

$$E = UIt + 2\pi^2 mr^2 f^2 + mgh\,.$$

Beispiel 7. In der Thermodynamik gilt die wichtige Formel

$$\frac{p \cdot V}{T} = n \cdot k_B\,.$$

Hier bezeichnet p den Druck eines abgeschlossenen Systems, V dessen Volumen, T seine Temperatur und n die Anzahl der Moleküle. k_B ist dabei eine Konstant und wir suchen deren Einheit. Es gilt

$$[n \cdot k_B] = \left[\frac{p \cdot V}{T}\right] \iff [n] \cdot [k_B] = \frac{[p] \cdot [V]}{[T]}$$

Wir nutzen aus, dass $[p] = \frac{N}{m^2}$, $[V] = m^3$, $[T] = K$ und $[n] = 1$ und erhalten

$$[k_B] = \frac{\frac{N}{m^2} \cdot m^3}{K} = \frac{Nm}{K} = \frac{J}{K}.$$

Die Konstante k_B heißt **Boltzmannkonstante** und hat den Wert

$$k_B = 1{,}380649 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}\,.$$

Beispiel 8. Durch ein zylindrisches Rohr fließt gleichmäßig eine Flüssigkeit. Aus physikalischen Experimenten weiß man, dass der Volumenstrom Φ in $[\Phi] = \frac{m^3}{s}$ gemessen wird und von den folgenden Größen abhängt:

- vom Rohrdurchmesser r gemessen in $[r] = m$,
- von der Viskosität η der Flüssigkeit gemessen in $[\eta] = \frac{kg}{s \cdot m}$ und
- vom Druckgradienten p' in Rohrrichtung gemessen in $[p'] = \frac{kg}{m^2 \cdot s^2}$.

Angenommen wird nun, dass der Volumenstrom Φ, bis auf eine Konstante k, ein Produkt aus Potenzen der Größen r, η, p' ist, also

$$\Phi = k \cdot r^a \cdot (p')^b \cdot \eta^c$$

für noch unbekannte Exponenten a, b und c. Es ist damit

$$\begin{aligned} & [\Phi] = [r^a \cdot (p')^b \cdot \eta^c] = [r]^a \cdot [p']^b \cdot [\eta]^c \\ \iff & \frac{m^3}{s} = m^a \cdot \left(\frac{kg}{m^2 \cdot s^2}\right)^b \cdot \left(\frac{kg}{m \cdot s}\right)^c \\ \iff & \frac{m^3}{s} = m^a \cdot \frac{kg^b}{m^{2b} \cdot s^{2b}} \cdot \frac{kg^c}{m^c \cdot s^c} \end{aligned}$$

$$\iff \frac{m^3}{s} = \frac{m^a \cdot kg^b \cdot kg^c}{m^{2b} \cdot m^c \cdot s^{2b} \cdot s^c}$$
$$\iff \frac{m^3}{s} = \frac{m^{a-2b-c} \cdot kg^{b+c}}{s^{2b+c}}\,.$$

Damit diese Gleichung "aufgeht" muss $c = -b$ sein (der Exponent von kg muss verschwinden, da auf der linken Seite kein kg vorkommt). Das gibt

$$\frac{m^3}{s} = \frac{m^{a-b}}{s^b}\,.$$

Ein weiterer Vergleich beider Seiten gibt $b = 1$ und damit $a - 1 = 3$, also $a = 4$. Zusammen mit der ersten Bedingung haben wir also $a = 4, b = 1, c = -1$.

Nutzen wir noch, dass die Konstante k durch $\frac{\pi}{8}$ gegeben ist, dann haben wir das so genannte **Gesetz von Hagen-Poiseuille** für laminare Strömungen:[5]

$$\Phi = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{r^4 \cdot p'}{\eta}\,.$$

[5] Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Gesetz_von_Hagen-Poiseuille

Tabelle 2: Die Liste der zusammengesetzten Größen mit eigenem Einheitensymbol

Größe	**typisches Größen-symbol**	**Einheiten-name**	**Einheiten-symbol**	**in Basis-einheiten**
Kraft	F	Newton	N	$\frac{kg\,m}{s^2}$
Druck	p	Pascal	Pa	$\frac{kg}{ms^2}$
Energie, Arbeit	E,W	Joule	J	$\frac{kg\,m^2}{s^2}$
Celsius-Temperatur	T	Grad Celsius	$°C$	K
Leistung	P	Watt	W	$\frac{kg\,m^2}{s^3}$
elektrische Ladung	Q	Coulomb	C	As
elektrische Spannung	U	Volt	V	$\frac{kg\,m^2}{s^3\,A}$
elektrische Kapazität	C	Farad	F	$\frac{s^4A^2}{kg\,m^2}$
elektrischer Widerstand	R	Ohm	Ω	$\frac{kg\,m^2}{s^3A^2}$
Induktivität	L	Henry	H	$\frac{kg\,m^2}{s^2A^2}$
Frequenz	f	Hertz	Hz	$\frac{1}{s}$
elektrischer Leitwert		Siemens	S	$\frac{s^3A^2}{kg\,m^2}$
magnetischer Fluss		Weber	Wb	$\frac{kg\,m^2}{s^2A}$
magnetische Flussdichte		Tesla	T	$\frac{kg}{s^2A}$
ebener Winkel		Radiant	rad	1
Raumwinkel		Steradiant	sr	1
Lichtstrom		Lumen	lm	cd
Beleuchtungsstärke		Lux	lx	$\frac{cd}{m^2}$
Radioaktivität		Becquerel	Bq	$\frac{1}{s}$
Energiedosis		Gray	Gy	$\frac{m^2}{s^2}$
Äquivalentdosis		Sievert	Sv	$\frac{m^2}{s^2}$
Katalytische Aktivität		Katal	kat	$\frac{mol}{s}$