Impuls

Teil 1: Impuls und Impulserhaltung

1 Warum Impuls? – Das Problem bei Stößen

Wir sehen uns zwei Kugeln an, die beide die gleiche Masse haben. Die eine der Kugeln ruht und die andere rollt mit einer festen Geschwindigkeit auf die ruhende zu. Dabei soll die zweite die erste zentral treffen, siehe Abbildung 1.

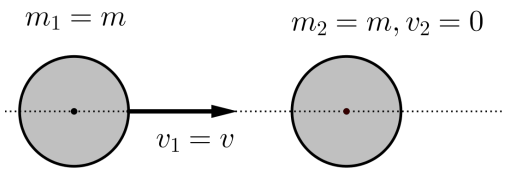

Abbildung 1: Die Kugeln vor dem Stoß

Die Frage ist nun: Wie verhalten sich die Kugeln nach dem Stoß?
Aus der Erfahrung wissen wir, dass die erste Kugel stehen bleibt und die zweite mit der Geschwindigkeit der ersten nach rechts rollt – zumindest bei einem vollkommen elastischen Stoß. Aber warum ist das so?
Nehmen wir die Energieerhaltung zur Hilfe. Dazu nehmen wir an, dass die Geschwindigkeiten der ersten und zweiten Kugel nach dem Stoß gesucht sind. Nennen wir diese $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_2$. Die Energiebilanz liefert:

$$E_{\text{vorher}} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \,,$$
$$E_{\text{nachher}} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \bar{v}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \bar{v}_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2\right) .$$

Wegen der Energieerhaltung folgt nun – nach Kürzen von $\frac{1}{2}m$:

$$\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 = v^2$$

als Bedingung an die beiden Geschwindigkeiten der Kugeln nach dem Stoß. Wie man leicht sieht, gibt es sehr viele Möglichkeiten für eine Wahl von $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_2$, sodass diese Bedingung erfüllt ist; einige Beispiele sieht man in Abbildung 2.
Das erste Beispiel A aus Abbildung 2 entspricht unserer Erfahrung, während die anderen teilweise absurde Lösungen liefern.
Das liegt insbesondere daran, dass die Bewegungsrichtungen der Kugeln – die hier durch die Vorzeichen von $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_2$ gegeben sind, in der Energiebetrachtung keine Rolle spielen.[1]

Frank Klinker – ESB, Vorheider Weg 8, 59067 Hamm
mail@frank-klinker.de
Version: 19. November 2026
[1] Wenn wir auch die Richtungen noch variieren würden, dann gäbe das teilweise noch absurdere Lösungen.

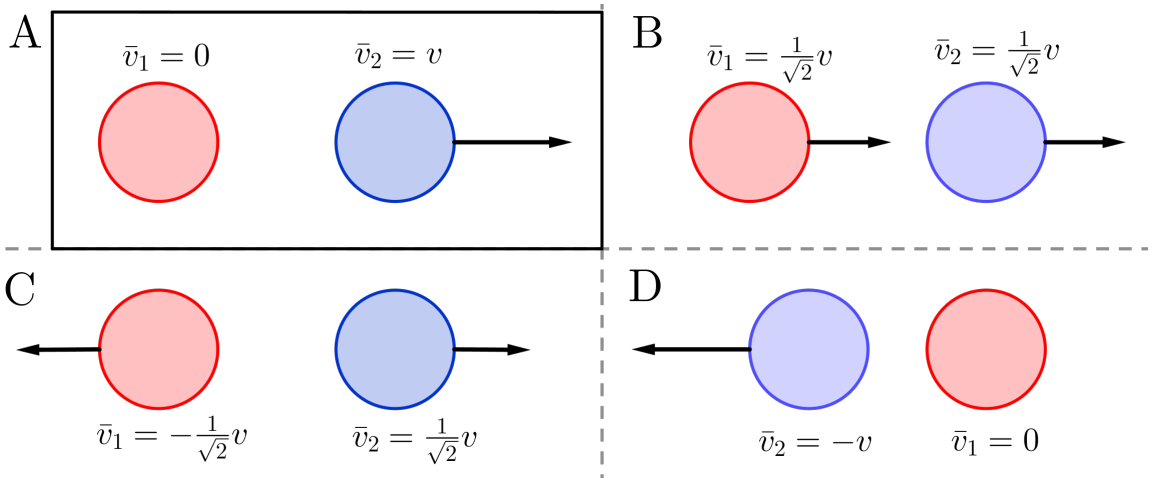

Abbildung 2: Die Kugeln nach dem Stoß

2 Der Impuls und die Impulserhaltung

Wir haben soeben gesehen, dass die Richtung der Kugeln eine wichtige Rolle spielt. Wir haben sogar bereits zuvor ein wichtiges Gesetz kennen gelernt, das den Kontakt zweier Kugeln mit deren Bewegungsrichtungen in Verbindung bringt: dieses heißt

Drittes Newtonsches Gesetz

Übt ein Körper **1** auf einen Körper **2** eine Kraft aus, so übt Körper **2** auf Körper **1** eine genauso große Kraft aus, die der ersten entgegenwirkt:

$$\vec{F}_{\mathbf{2}\curvearrowright\mathbf{1}} = -\vec{F}_{\mathbf{1}\curvearrowright\mathbf{2}}$$

Wenn wir nun die Geschwindigkeiten $v_1, \bar{v}_1$ und $v_2, \bar{v}_2$ der Kugeln vor und nach dem Stoß betrachten, so erhalten wir $\Delta v_1 = \bar{v}_1 - v_1$ und $\Delta v_2 = \bar{v}_2 - v_2$ für die Geschwindigkeitsdifferenzen. Mit der Stoßdauer Δt gibt das die mittleren Beschleunigungen $a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t}$ und $a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t}$. Damit schreiben wir Newton-3 als

$$\vec{F}_{2\curvearrowright 1} = -\vec{F}_{1\curvearrowright 2} \iff m_1 \cdot a_1 = -m_2 \cdot a_2 \iff m_1 \cdot \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = -m_2 \cdot \frac{\Delta v_2}{\Delta t}\,.$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit der Stoßdauer Δt und setzen wir die Differenzen ein, so ergibt sich

$$m_1 \cdot (\bar{v}_1 - v_1) = -m_2 \cdot (\bar{v}_2 - v_2)$$

oder nach ein wenig Umstellen schließlich

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot \bar{v}_1 + m_2 \cdot \bar{v}_2\,. \tag{1}$$

In Gleichung (1) sehen wir, dass eine neue Kombination aus Masse und Geschwindigkeit ins Spiel kommt, die auch die Richtung der Geschwindigkeit mit beachtet, nämlich das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit.[2] Daher nehmen wir das als neue Definition:

[2] In der Situation, die wir uns hier angesehen haben, wird die Richtung durch die Vorzeichen beschrieben.

Impuls

Der **Impuls** $\vec{p}$ eines Körpers der Masse m und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist das Produkt

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Der Impuls hat die Einheit

$$[p] = \frac{kg\,m}{s} = Ns$$

In Gleichung (1) sehen wir aber noch mehr: Alle Impulse vor dem Stoß sind zusammengerechnet genauso groß wie alle Impulse nach dem Stoß zusammengerechnet. Das halten wir fest und formulieren einen neuen Erhaltungssatz:

Gesamtimpuls und Impulserhaltung

Der **Gesamtimpuls** eines Systems ergibt sich als die Summe aller Einzelimpulse:

$$\vec{p}_{\text{ges}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots$$

Die **Impulserhaltung** sagt: In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtimpuls vor dem Stoß gleich dem Gesamtimpuls nach dem Stoß.

$$\vec{p}_{\text{ges, vorher}} = \vec{p}_{\text{ges, nachher}}$$

Neben der Energie haben wir also nun mit dem Impuls eine zusätzliche **Erhaltungsgröße**. Mathematisch bedeutet das: Wir erhalten zusätzlich zur Gleichung aus der Energieerhaltung weitere Gleichungen aus der Impulserhaltung. Diese erlauben uns in vielen Situationen, gesuchte Größen eindeutig festzulegen, beispielsweise Geschwindigkeiten.
Beispielsweise haben wir beim Zusammenstoß der beiden Kugeln aus dem Anfangsbeispiel zwei gesuchte Geschwindigkeiten $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ und mit der Energie- und der Impulserhaltung zwei Gleichungen zum Lösen des Problems. Dieses Beispiel des elastischen Kugelstoßes sehen wir uns später noch einmal genau an.

3 Etwas genauer: Impuls und Kraft

Wir kommen nochmal auf die Kräftebetrachtung aus dem vorigen Abschnitt zurück und fragen uns: Wenn ein Körper **1** auf einen Körper **2** mit einer Geschwindigkeit v auftrifft, wie groß ist dann der übertragene Impuls?
Dazu kommt es darauf an, wie lange der Stoß dauert, denn wir hatten

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \iff m \cdot \Delta v = F \cdot \Delta t \quad \text{und damit} \quad \Delta p = F \cdot \Delta t\,.$$

Diese Gleichung lässt sich nun so interpretieren:

Kraftstoß

Wirkt auf einen Körper für die Dauer Δt die konstante Kraft $\vec{F}$, so ändert sich der Impuls um den Wert

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Deshalb nennt man diese Impulsänderung auch den **Kraftstoß**.

Wie man sieht, benötigt man zur Berechnung des Kraftstoßes die beteiligten Massen gar nicht. Mit Hilfe der Masse m des Körpers lässt sich anschließend die Geschwindigkeitsänderung bestimmen:

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m}\,.$$

Ist die Kraft nicht konstant, dann gilt die Formel so nicht. Dazu sehen wir uns die Abbildung 3 an.

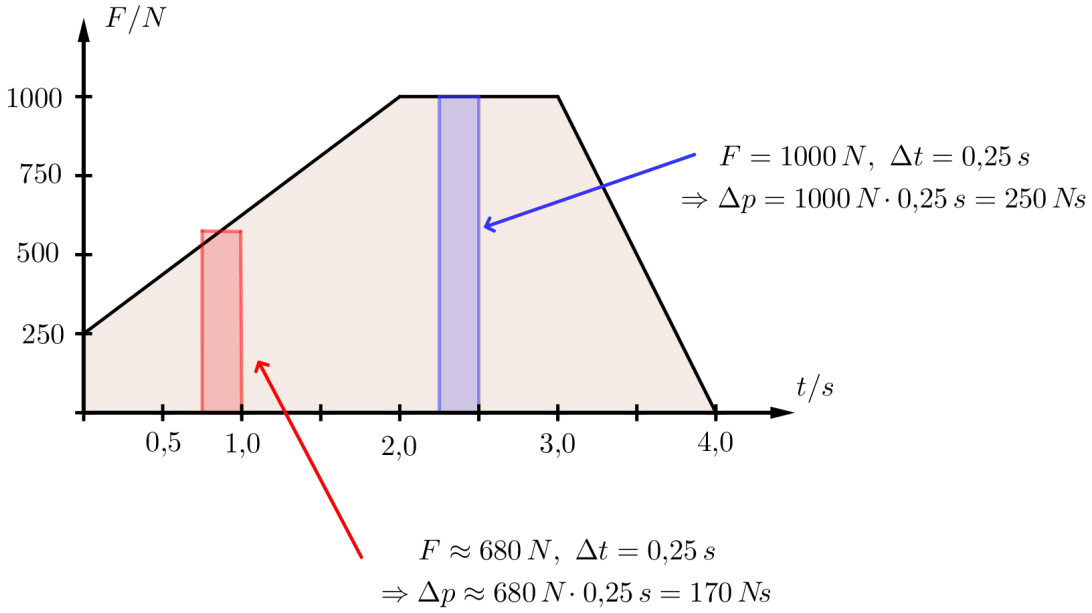

Abbildung 3: Kraft und Kraftstoß

- Man sieht in dieser Abbildung, dass im Fall einer konstanten Kraft der Kraftstoß der Fläche zwischen dem Graphen von $F(t)$ und der t-Achse entspricht (blaues Beispiel).
- Im Fall, dass die Kraft nicht konstant ist, ist das höchstens näherungsweise richtig, nämlich dann, wenn man das Zeitintervall so klein wählt, dass F sich dort nur wenig ändert (rotes Beispiel).
- Genau entspricht der Kraftstoß dem Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen $F(t)$ und der t-Achse.[3]
- In dem roten Beispiel ist $F(t) = 250\,N + 500,\frac{N}{s}\cdot t$, sodass sich als Fläche ein Trapez mit den Seitenlängen $F(0{,}75\,s) = 625\,N$ und $F(1{,}0\,s) = 750\,N$ sowie der Höhe $0{,}25\,s$. Damit erhält man

$$\Delta p = \frac{750\,N + 625\,N}{2}\cdot 0{,}25\,s = 171{,}875\,Ns$$

- Die gesamte Impulsänderung während der vier Sekunden ist

$$\Delta p = \frac{1000\,N + 250\,N}{2}\cdot 2\,s + 1000\,N\cdot 1\,s + \frac{1000\,N}{2}\cdot 1\,s = 2750\,Ns$$

[3]Etwas vorsichtiger muss man argumentieren, wenn die Kraft F negativ wird. Aber für unsere Betrachtungen reicht der hier behandelte Fall völlig aus.

4 Elastischer versus unelastischer Stoß

Neben dem bis jetzt diskutierten (vollkommen) elastischen Stoß gibt es noch den (vollkommen) unelastischen Stoß zweier Körper (bei unsern Beispielen Kugeln)

- Beim vollkommen elastischen Stoß trennen sich die zwei Körper wieder und bewegen sich reibungsfrei unabhängig voneinander davon.
  Gekennzeichnet ist dieser Stoß dadurch, dass die kinetische Energie des Systems erhalten bleibt.
- Beim vollkommen unelastischen Stoß bewegen sich beide Köper nach dem Stoß gemeinsam als ein Körper mit addierter Masse weiter.
  Bei diesem Stoß bleibt die kinetische Energie typischerweise nicht erhalten. Die Energiedifferenz wird etwa für die Deformation der Körper benötigt oder für innere Arbeit, die für die Verbindung der Körper nötig ist.

Hinweis: Ein realistischer Stoß ist typischerweise weder vom ersten noch vom zweiten Typ, da sich die Körper verformen können und sich trotzdem wieder voneinander trennen, z. B. beim Zusammenstoß zweier Autos. Bei der "Knautschzone" eines Autos ist dieser "Verlust" von kinetischer Energie zugunste der Deformation sogar gewollt.

Die Impuls- und Energiebilanz des unelastischen zentralen Stoßes

Die Körper mit den Massen m_1, m_2 bewegen sich vor dem Stoß mit den Geschwindigkeiten[4] v_1, v_2 auf einer gemeinsamen Linie. Nach dem Stoß bewegen sich beide mit der gemeinsamen Masse $m_1 + m_2$ und der Geschwindigkeit $\bar{v}$ auf der gemeinsamen Linie weiter.

$$p_{\text{vorher}} = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2\,, \quad p_{\text{nachher}} = (m_1 + m_2) \cdot \bar{v}\,.$$

Hier sehen wir, dass die Impulserhaltung völlig ausreicht, um die Geschwindigkeit nach dem Stoß zu berechnen:

$$p_{\text{vorher}} = p_{\text{nachher}} \;\Leftrightarrow\; m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot \bar{v} \;\Leftrightarrow\; \bar{v} = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

Was ist aber die Folge für die Energiebilanz? Dazu sehen wir uns die kinetischen Energien an:

$$E_{\text{kin,vorher}} = \tfrac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \tfrac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2\,, \quad E_{\text{kin,nachher}} = \tfrac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot \bar{v}^2\,.$$

Mit $\bar{v}$ von oben ergibt sich in der Energiebilanz eine Differenz von

$$\begin{aligned}
E_{\text{diff}} &= E_{\text{kin,vorher}} - E_{\text{kin,nachher}} \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \tfrac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot \Big(\frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}\Big)^2 \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \tfrac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \cdot v_1^2 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} \cdot v_2^2 \\
&\quad - \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \cdot v_2 \\
&= \frac{1}{2 \cdot (m_1 + m_2)} \big(m_1 \cdot (m_1 + m_2) \cdot v_1^2 + m_2 \cdot (m_1 + m_2) \cdot v_2^2 \\
&\qquad\qquad - m_1^2 \cdot v_1^2 - m_2^2 \cdot v_2^2 - 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1 \cdot v_2\big)
\end{aligned}$$

[4] **Achtung:** Die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 sind hier nicht die Beträge der Geschwindigkeiten, sondern besitzen ein Vorzeichen; v_1, v_2 haben das gleiche Vorzeichen, wenn sich die Körper in die gleiche Richtung bewegen. Wenn sie sich aufeinander zu bewegen, dann haben sie unterschiedliche Vorzeichen.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\cdot(m_1+m_2)}\big(m_1^2\cdot v_1^2 + m_1\cdot m_2\cdot v_1^2 + m_2^2\cdot v_2^2 + m_1\cdot m_2\cdot v_2^2 \\
&\qquad\qquad - m_1^2\cdot v_1^2 - m_2^2\cdot v_2^2 - 2\cdot m_1\cdot m_2\cdot v_1\cdot v_2\big) \\
&= \frac{1}{2\cdot(m_1+m_2)}\big(m_1\cdot m_2\cdot v_1^2 + m_1\cdot m_2\cdot v_2^2 - 2\cdot m_1\cdot m_2\cdot v_1\cdot v_2\big) \\
&= \frac{m_1\cdot m_2}{2\cdot(m_1+m_2)}(v_1-v_2)^2
\end{aligned}
$$

Dies ist der Teil der anfangs verfügbaren kinetischen Energie, der bei diesem vollkommen unelastischen Stoß in andere Energieformen umgewandelt wird, z. B. zur Verbindung der beiden Körper oder als Wärme.

Exkurs: Interpretation des unelastischen Stoßes

Das dritte Newtonsche Gesetz sagt uns, allgemein $\vec{F}_{\mathbf{2}\curvearrowright\mathbf{1}} = -\vec{F}_{\mathbf{1}\curvearrowright\mathbf{2}}$. Wenn wir diese Kraft $\vec{F}$ nennen, ist das $\vec{F} = \vec{m}_1\cdot\vec{a}_1 = -m_2\cdot\vec{a}_2$.
Die Relativbewegung beider Körper ist durch die Differenz $\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$ gekennzeichnet. Das gibt

$$
\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \frac{1}{m_1}\cdot\vec{F} + \frac{1}{m_2}\vec{F} = \Big(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\Big)\cdot\vec{F} = \frac{m_1+m_2}{m_1\cdot m_2}\cdot\vec{F}\,.
$$

Formt man das um, dann ist

$$
F = \frac{m_1\cdot m_2}{m_1+m_2}\cdot\vec{a}_{\text{rel}}\,.
$$

Wegen dieser Darstellung nennt man

$$
\mu = \frac{m_1\cdot m_2}{m_1+m_2}
$$

die **reduzierte Masse** des Systems, das aus den zwei Körpern besteht.
Kommen wir zurück zu dem Fall, dass sich die zwei Körper entlang einer gemeinsamen Linie bewegen. Die relative Beschleunigung $\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$ gibt dann die relative Geschwindigkeit[5] $v_{\text{rel}} = v_1 - v_2$.
Schreibt man $m_{\text{ges}} = m_1 + m_2$ und $v_{\text{ges}} = \bar{v}$, für die Gesamtmasse nach dem Stoß und deren Geschwindigkeit, dann ergibt sich als Gesamtenergie des Systems:

$$
E_{\text{kin,vorher}} = E_{\text{kin,nachher}} + E_{\text{diff}} = \frac{1}{2}\cdot m_{\text{ges}}\cdot v_{\text{ges}}^2 + \frac{1}{2}\cdot\mu\cdot v_{\text{rel}}^2\,.
$$

Das lässt sich nun als Summe zweier Bewegungen interpretieren:

- der Bewegung der Gesamtmasse $m_{\text{ges}} = m_1+m_2$ mit der gemeinsamen Geschwindigkeit $v_{\text{ges}} = \bar{v} = \dfrac{m_1\cdot v_1 + m_2\cdot v_2}{m_1+m_2}$ und
- der Bewegung der reduzierten Masse $\mu = \dfrac{m_1\cdot m_2}{m_1+m_2}$ mit der relativen Geschwindigkeit $v_{\text{rel}} = v_1 - v_2$.

Fazit: Beim vollkommen unelastischen Stoß bleibt die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung erhalten, während die kinetische Energie der Relativbewegung vollständig in andere Energieformen umgewandelt wird.

[5] **Achtung:** Auch hier gilt der Hinweis zu den Vorzeichen aus Fußnote 4.