# Impuls

Teil 2: Kugelstöße beim idealen Billard als zentrales Beispiel für den Impuls

## 1 Der zentrale vollkommen elastische Stoß zweier Kugeln

**Vorbemerkung:** Unter einem vollkommen elastischen Stoß zweier Kugeln versteht man einen idealisierten Stoß, bei dem die kinetische Energie vollständig erhalten bleibt. Das heißt, insbesondere, dass es keine bleibenden Verformungen und keine Reibungsverluste gibt.

Kommen wir zurück zu unserem Eingangsbeispiel zweier Kugeln mit der gleichen Masse, die sich zentral treffen, siehe Abbildung 1. Wie bereits zuvor seien $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_2$ die Geschwindig-

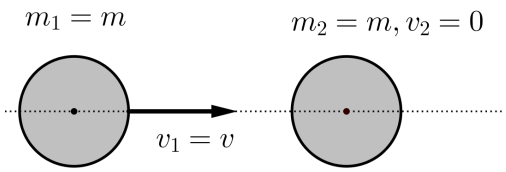


Abbildung 1: Die Kugeln vor dem Stoß

keiten nach dem Stoß. Die Energieerhaltung liefert dann

$$E_{\text{vorher}} = E_{\text{nachher}} \iff \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_1^2 = \frac{1}{2}\cdot m\cdot \bar{v}_1^2 + \frac{1}{2}\cdot m\cdot \bar{v}_2^2$$

und schließlich

$$\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 = v^2\,.$$

Diese Gleichung allein führte zu einer Mehrdeutigkeit in der Menge der Möglichkeiten, wie sich die Kugeln nach dem Stoß weiterbewegen können. Daher haben wir zusätzlich den Begriff des Impulses eingeführt und die Impulserhaltung als zusätzliche Bedingung. Mit

$$\begin{aligned} p_{\text{vorher}} &= m_1\cdot v_1 + m_2\cdot v_2 = m\cdot v\,,\\ p_{\text{nachher}} &= m_1\cdot \bar{v}_1 + m_2\cdot \bar{v}_2 = m\cdot\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2\right). \end{aligned}$$

erhalten wir aus $p_{\text{vorher}} = p_{\text{nachher}}$ hier nach Kürzen von $m$

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = v\,.$$

Insgesamt haben wir

| | | |
|---|---|---|
| I | $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = v$ | $\big\vert(\text{I})^2$ |
| II | $\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 = v^2$ | |
| I′ | $\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 + 2\cdot\bar{v}_1\cdot\bar{v}_2 = v^2$ | $\big\vert\text{I}' - \text{II}'$ |
| II′ | $\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 = v^2$ | |
| I″ | $2\cdot\bar{v}_1\cdot\bar{v}_2 = 0$ | |
| II″ | $\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 = v^2$ | |

Aus Gleichung I″ folgt nun $\bar{v}_1 = 0$ oder $\bar{v}_2 = 0$:

Frank Klinker – ESB, Vorheider Weg 8, 59067 Hamm
mail@frank-klinker.de
Version: 18. November 2026

- Aus $\bar{v}_1 = 0$ erhalten wir dann mit I zusätzlich $\bar{v}_2 = v$, also unsere "Erfahrungslösung" aus Beispiel A.
- Aus $\bar{v}_2 = 0$ erhalten wir mit I analog $\bar{v}_1 = v$. In unserem Versuchsaufbau ist das eine unphysikalische Lösung, da in diesem Fall die erste Kugel durch die zweite Kugel hindurch rollt.
  Aber tatsächlich ist das genau die einzige zusätzliche Lösung, wenn wir unseren Aufbau ein wenig erweitern: Die erste Kugel rollt einfach an der zweiten vorbei.

# 2 Der schiefe Stoß beim idealen Billard

## 2.1 Die Beschreibung des Versuchs

Beim schiefen Stoß treffen die Kugeln nicht zentral aufeinander, sondern das Zentrum der ruhenden Kugel liegt neben der Rollrichtung der ersten Kugel. Dieser Abstand beschreibt die Geometrie des Stoßes und heißt daher auch **Stoßparameter**. In der Abbildung 2 wird dieser Abstand mit $h$ bezeichnet; für einen Stoß ist $h < r_1 + r_2$ notwendig. Insbesondere ist durch die geometrischen Vorgaben der **Stoßwinkel** $\alpha$ definiert durch $\sin(\alpha) = \frac{h}{r_1+r_2}$ und liegt zwischen 0° und 90°.

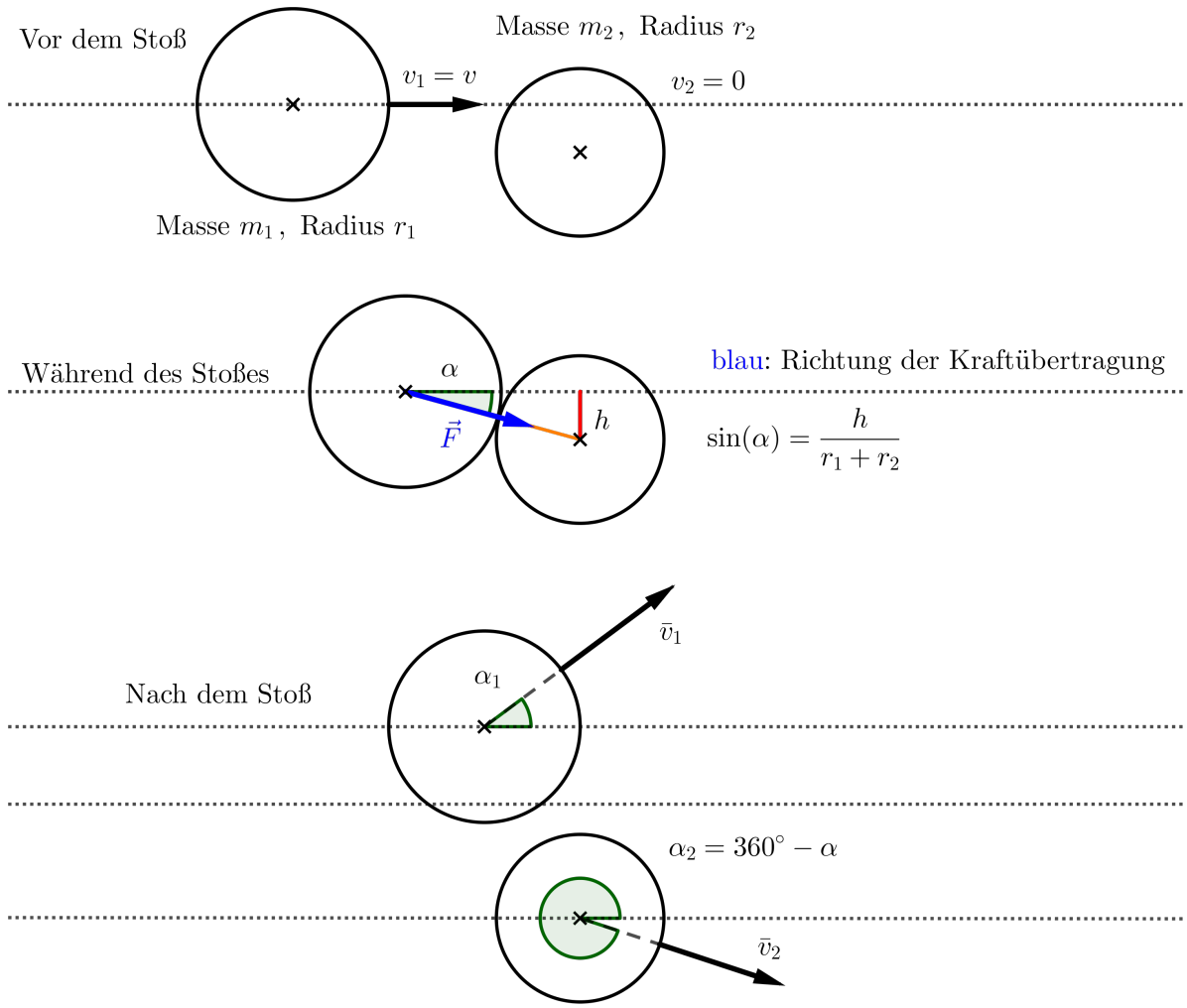


Abbildung 2: Die Kugeln vor, während und nach dem Stoß

Zur Bearbeitung dieses allgemeinen Falls zerlegen wir den Impuls in seine $x$- und $y$-Komponente

und beachten, dass beide Komponenten getrennt voneinander erhalten bleiben (die $x$-Achse zeigt bei uns horizontal nach rechts). Zusammen mit der Energieerhaltung haben wir daher drei Gleichungen:

$$
\begin{array}{lll}
\text{I} & E_{\text{vorher}} = E_{\text{nachher}} & \\
\text{II} & p_{x,\text{vorher}} = p_{x,\text{nachher}} & \\
\text{III} & p_{y,\text{vorher}} = p_{y,\text{nachher}} & \\
\hline
\text{I} & \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1\bar{v}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\bar{v}_2^2 & \big| : (\tfrac{1}{2}m_1) \\
\text{II} & m_1v_{1x} + m_2v_{2x} = m_1\bar{v}_{1x} + m_2\bar{v}_{2x} & \big| : m_1 \\
\text{III} & m_1v_{1y} + m_2v_{2y} = m_1\bar{v}_{1y} + m_2\bar{v}_{2y} & \big| : m_1 \\
\hline
\text{I} & v_1^2 + kv_2^2 = \bar{v}_1^2 + k\bar{v}_2^2 & \big| v_1 = v, v_2 = 0 \\
\text{II} & v_{1x} + kv_{2x} = \bar{v}_{1x} + k\bar{v}_{2x} & \big| v_{1x} = v, v_{2x} = 0 \\
\text{III} & v_{1y} + kv_{2y} = \bar{v}_{1y} + k\bar{v}_{2y} & \big| v_{1y} = v_{2y} = 0 \\
\hline
\text{I} & v^2 = \bar{v}_1^2 + k\bar{v}_2^2 & \\
\text{II} & v = \bar{v}_{1x} + k\bar{v}_{2x} & \big| \bar{v}_{1x} = \bar{v}_1\cos(\alpha_1), \bar{v}_{2x} = \bar{v}_2\cos(\alpha_2) \\
\text{III} & 0 = \bar{v}_{1y} + k\bar{v}_{2y} & \big| \bar{v}_{1y} = \bar{v}_1\sin(\alpha_1), \bar{v}_{2y} = \bar{v}_2\sin(\alpha_2) \\
\hline
\text{I} & v^2 = \bar{v}_1^2 + k\bar{v}_2^2 & \\
\text{II} & v = \bar{v}_1\cos(\alpha_1) + k\bar{v}_2\cos(\alpha_2) & \big| \alpha_2 = 360^\circ - \alpha \\
\text{III} & 0 = \bar{v}_1\sin(\alpha_1) + k\bar{v}_2\sin(\alpha_2) & \big| \alpha_2 = 360^\circ - \alpha \\
\hline
\text{I} & v^2 = \bar{v}_1^2 + k\bar{v}_2^2 & \\
\text{II} & v = \bar{v}_1\cos(\alpha_1) + k\bar{v}_2\cos(\alpha) & \\
\text{III} & 0 = \bar{v}_1\sin(\alpha_1) - k\bar{v}_2\sin(\alpha) &
\end{array}
$$

Bisher haben wir lediglich die Geometrie ausgenutzt und $k = \frac{m_2}{m_1}$ abgekürzt. Die Gleichungen selbst haben wir nicht verändert, weshalb wir auch die Nummerierung beibehalten haben. Die letzten Gleichungen nehmen wir also in den nächsten Abschnitten als Ausgangspunkt.

### 2.2 Der Startfall: Gleich schwere Kugeln.

Wenn die Massen $m_1 = m_2$ der beiden Kugeln gleich sind, dann ist insbesondere $k = 1$ und die Gleichungen werden wesentlich einfacher zu lösen – wie wir später sehen werden.
Wir starten also direkt mit

$$
\begin{aligned}
\text{I} \quad & v^2 = \bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 \\
\text{II} \quad & v = \bar{v}_1\cos(\alpha_1) + \bar{v}_2\cos(\alpha) \\
\text{III} \quad & 0 = \bar{v}_1\sin(\alpha_1) - \bar{v}_2\sin(\alpha)
\end{aligned}
$$

Wir stellen die Gleichungen II und III zunächst nach $\bar{v}_1$ um:

$$
\begin{array}{lll}
\text{II}' & \bar{v}_1\cos(\alpha_1) = v - \bar{v}_2\cos(\alpha) & \big| (\text{II}')^2 \\
\text{III}' & \bar{v}_1\sin(\alpha_1) = \bar{v}_2\sin(\alpha) & \big| (\text{III}')^2 \\
\hline
\text{II}'' & \bar{v}_1^2\cos^2(\alpha_1) = v^2 + \bar{v}_2^2\cos^2(\alpha) - 2v\bar{v}_2\cos(\alpha) & \\
\text{III}'' & \bar{v}_1^2\sin^2(\alpha_1) = \bar{v}_2^2\sin^2(\alpha) &
\end{array}
$$

Addieren wir diese beiden Gleichungen so bekommen wir

$$
\begin{aligned}
& \bar{v}_1^2\big(\sin^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_1)\big) = v^2 + \bar{v}_2^2\big(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\big) - 2v\bar{v}_2\cos(\alpha) \\
\Leftrightarrow \quad & \bar{v}_1^2 = v^2 + \bar{v}_2^2 - 2v\bar{v}_2\cos(\alpha)
\end{aligned}
$$

Das setzen wir in I ein und bekommen

$$v^2 = v^2 + \bar{v}_2^2 - 2v\bar{v}_2\cos(\alpha) + \bar{v}_2^2 \;\Leftrightarrow\; 0 = 2\bar{v}_2\big(\bar{v}_2 - v\cos(\alpha)\big)\,.$$

Das hat die Lösungen[1] $\bar{v}_2 = 0$ und

$$\bar{v}_2 = v\cos(\alpha)\,.$$

Das können wir wiederum in $I$ einsetzen und erhalten

$$v^2 = \bar{v}_1^2 + v^2\cos^2(\alpha) \;\Leftrightarrow\; \bar{v}_1^2 = v^2\big(1 - \cos^2(\alpha)\big) = v^2\sin^2(\alpha)$$

also

$$\bar{v}_1 = v\sin(\alpha)\,.$$

Diese Geschwindigkeiten $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_2$ setzen wir in II und III ein:

$$v = v\sin(\alpha)\cos(\alpha_1) + v\cos(\alpha)\cos(\alpha) \;\Leftrightarrow\; \sin(\alpha)\cos(\alpha_1) = 1 - \cos^2(\alpha) \;\Leftrightarrow\; \cos(\alpha_1) = \sin(\alpha)$$

und

$$0 = v\sin(\alpha)\sin(\alpha_1) - v\cos(\alpha)\sin(\alpha) \;\Leftrightarrow\; \sin(\alpha_1) = \cos(\alpha)\,.$$

Wir dividieren diese Gleichungen durcheinander und nutzen, dass für alle Winkel $\varphi$ die Gleichungen $\cos(\varphi) = \sin(90° - \varphi)$ und $\sin(\varphi) = \cos(90° - \varphi)$ sowie $\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$ gelten. Damit folgt

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} \;\Longleftrightarrow\; \tan(\alpha_1) = \tan(90 - \alpha)$$

also

$$\alpha_1 + \alpha = 90°\,.$$

Damit rollen die beiden Kugeln senkrecht zueinander davon.

**Die Lösung des schiefen Stoßes zweier Kugeln mit gleicher Masse**

Vorgegeben sind die Radien $r_1, r_2$, die Massen $m_1 = m_2$ sowie der Stoßparameter $h$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v$. Die geometrischen Werte $r_1, r_2, h$ definieren den Stoßwinkel $\alpha$ mit

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{r_1 + r_2}\,.$$

Die Rollrichtungen $\alpha_1, \alpha_2$ und die Geschwindigkeiten $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ nach dem Stoß sind

$$\alpha_2 = 360° - \alpha \qquad \alpha_1 = 90° - \alpha$$
$$\bar{v}_2 = v\cos(\alpha) \qquad \bar{v}_1 = v\sin(\alpha)$$

### 2.3 Die Lösung für beliebiges Massenverhältnis $k = \frac{m_2}{m_1}$

Wir starten wieder an der gleichen Stelle und beachten, dass $k \neq 1$ möglich ist. Die Gleichungen II und III bilden ein 2×2-LGS für $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_2$:

[1] Die Lösung $\bar{v}_2 = 0$ beschreibt ebenfalls den Fall ohne Impulsübertragung, denn es folgt dann sofort $\bar{v}_1 = v$. Wir dürfen diese Lösung also auch vernachlässigen.

$$
\begin{array}{rrl}
\text{I} & v^2 = \bar{v}_1^2 + k\bar{v}_2^2 & \\
\text{II} & v = \bar{v}_1\cos(\alpha_1) + k\bar{v}_2\cos(\alpha) & \big|\ \sin(\alpha_1)\text{II} - \cos(\alpha_1)\text{III} \\
\text{III} & 0 = \bar{v}_1\sin(\alpha_1) - k\bar{v}_2\sin(\alpha) & \big|\ \sin(\alpha)\text{II} + \cos(\alpha)\text{III} \\
\hline
\text{I} & v^2 = \bar{v}_1^2 + k\bar{v}_2^2 & \\
\text{II}' & v\sin(\alpha_1) = k\bar{v}_2\big(\sin(\alpha_1)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha_1)\big) & \\
\text{III}' & v\sin(\alpha) = \bar{v}_1\big(\sin(\alpha_1)\cos(\alpha) + \cos(\alpha_1)\sin(\alpha)\big) & \\
\hline
\text{I} & v^2 = \bar{v}_1^2 + k\bar{v}_2^2 & \\
\text{II}'' & \bar{v}_2 = v\dfrac{\sin(\alpha_1)}{k\big(\sin(\alpha_1)\cos(\alpha) + \cos(\alpha_1)\sin(\alpha)\big)} & \\
\text{III}'' & \bar{v}_1 = v\dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha_1)\cos(\alpha) + \cos(\alpha_1)\sin(\alpha)} &
\end{array}
$$

Die Lösungen aus II″ und III″ setzen wir in I ein:

$$v^2 = v^2\frac{\sin^2(\alpha)}{\big(\sin(\alpha_1)\cos(\alpha) + \cos(\alpha_1)\sin(\alpha)\big)^2} + kv^2\frac{\sin^2(\alpha_1)}{k^2\big(\sin(\alpha_1)\cos(\alpha) + \cos(\alpha_1)\sin(\alpha)\big)^2}$$

Teilen durch $v^2$ und Multiplizieren mit dem Nenner gibt

$$\big(\sin(\alpha_1)\cos(\alpha) + \cos(\alpha_1)\sin(\alpha)\big)^2 = \sin^2(\alpha) + \tfrac{1}{k}\sin^2(\alpha_1)$$

Das ist eine Gleichung für den unbekannten Winkel $\alpha_1$. Diese kann man auflösen. Dazu teilen wir zunächst beide Seiten durch[2] $\cos^2(\alpha_1)$:

$$\Big(\frac{\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)}\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\Big)^2 = \sin^2(\alpha)\frac{1}{\cos^2(\alpha_1)} + \frac{1}{k}\cdot\frac{\sin^2(\alpha_1)}{\cos^2(\alpha_1)}$$

Wir nutzen nun $\tan(\alpha_1) = \frac{\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)}$ und $\frac{1}{\cos^2(\alpha_1)} = 1 + \tan^2(\alpha_1)$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
&\big(\tan(\alpha_1)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\big)^2 = \sin^2(\alpha)\big(1 + \tan^2(\alpha_1)\big) + \tfrac{1}{k}\tan^2(\alpha_1) \\
\Leftrightarrow\ &\tan^2(\alpha_1)\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) + 2\tan(\alpha_1)\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \sin^2(\alpha)\big(1 + \tan^2(\alpha_1)\big) + \tfrac{1}{k}\tan^2(\alpha_1) \\
\Leftrightarrow\ &\tan^2(\alpha_1)\big(1 - k\big(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\big)\big) - 2k\tan(\alpha_1)\cos(\alpha)\sin(\alpha) = 0
\end{aligned}
$$

Das hat zum einen die Lösung[3] $\tan(\alpha_1) = 0$ und die weitere Lösung

$$\tan(\alpha_1) = \frac{2k\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{1 - k\big(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\big)} \tag{1}$$

Um nun Formeln für $\bar{v}_2$ und $\bar{v}_1$ zu bekommen, kann man das Ergebnis (1) in II″ und III″ einsetzen. Dann muss man aber viele der Rechnungen, die wir gerade gemacht haben wieder rückgängig machen.

[2] Damit müssen wir $\alpha_1 = 90°$ extra behandeln. In diesem Fall liefert die vorige Formel $\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \frac{1}{k}$, also $\cos(2\alpha) = \frac{1}{k}$.

Für $k < 1$, also $m_1 > m_2$, kann dieser Fall nicht auftreten.

Für $k > 1$, also $m_1 < m_2$, gibt es genau einen Stoßparameter, für den $\alpha_1 = 90°$ erreicht werden.

Für $k = 1$ ist $\alpha = 0$, also der zentrale Stoß. Hier ist allerdings $\bar{v}_1 = 0$, sodass $\alpha_1$ gar nicht definiert ist.

[3] Die Lösung $\tan(\alpha_1) = 0$ beschreibt den Fall ohne Impulsübertragung, denn es folgt dann sofort $\bar{v}_2 = 0$, $\bar{v}_1 = v$. Wir dürfen die Lösung hier also vernachlässigen.

Das ist nicht nötig, wenn wir (wie im Fall gleicher Massen) direkt mit den Gleichungen II und III starten und dort die Geschwindigkeit $\bar{v}_1$ eliminieren. Dazu rechnen wir:

$$\begin{array}{rll}
\text{I} & v^2 = \bar{v}_1^2 + k\bar{v}_2^2 & \\
\text{II} & v = \bar{v}_1\cos(\alpha_1) + k\bar{v}_2\cos(\alpha) & \big| \\
\text{III} & 0 = \bar{v}_1\sin(\alpha_1) - k\bar{v}_2\sin(\alpha) & \big| \\
\hline
\text{I} & v^2 = \bar{v}_1^2 + k\bar{v}_2^2 & \\
\text{II}' & \bar{v}_1\cos(\alpha_1) = v - k\bar{v}_2\cos(\alpha) & \big|(\text{II}')^2 \\
\text{III}' & \bar{v}_1\sin(\alpha_1) = k\bar{v}_2\sin(\alpha) & \big|(\text{III}')^2 \\
\hline
\text{I} & v^2 = \bar{v}_1^2 + k\bar{v}_2^2 & \\
\text{II}'' & \bar{v}_1^2\cos^2(\alpha_1) = v^2 + k^2\bar{v}_2^2\cos^2(\alpha) - 2kv\bar{v}_2\cos(\alpha) & \big|\text{II}'' + \text{III}'' \\
\text{III}'' & \bar{v}_1^2\sin^2(\alpha_1) = k^2\bar{v}_2^2\sin^2(\alpha) & \\
\hline
\text{I} & v^2 = \bar{v}_1^2 + k\bar{v}_2^2 & \\
\text{II}''' & \bar{v}_1^2 = v^2 + k^2\bar{v}_2^2 - 2kv\bar{v}_2\cos(\alpha) & \\
\text{III}'' & \bar{v}_1^2\sin^2(\alpha_1) = k^2\bar{v}_2^2\sin^2(\alpha) &
\end{array}$$

Die Gleichung II‴ setzen wir in I ein und erhalten

$$v^2 = v^2 + k^2\bar{v}_2^2 - 2kv\bar{v}_2\cos(\alpha) + k\bar{v}_2^2 \iff 0 = k(k+1)\bar{v}_2\Big(\bar{v}_2 - \frac{2\cos(\alpha)v}{k+1}\Big)$$

mit den Lösungen[4] $\bar{v}_2 = 0$ und

$$\bar{v}_2 = \frac{2v\cos(\alpha)}{k+1}\,.$$

Setzt man das nun in die nach $\bar{v}_1$ umgestellte Formel I ein, dann erhält man

$$\bar{v}_1 = v\sqrt{1 - \frac{4k\cos^2(\alpha)}{(k+1)^2}}$$

**Die Lösung des schiefen Stoßes zweier Kugeln**

Vorgegeben sind die Radien $r_1, r_2$, die Massen $m_1, m_2$ und damit $k = \frac{m_2}{m_1}$ sowie der Stoßparameter $h$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v$. Die geometrischen Werte $r_1, r_2, h$ definieren den Stoßwinkel $\alpha$ mit

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{r_1 + r_2}\,.$$

Die Rollrichtungen $\alpha_1, \alpha_2$ und die Geschwindigkeiten $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ nach dem Stoß sind[5]

$$\alpha_2 = 360° - \alpha \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2k\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{1 - k\big(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\big)}\right)$$

$$\bar{v}_2 = \frac{2v\cos(\alpha)}{k+1} \qquad \bar{v}_1 = v\sqrt{1 - \frac{4k\cos^2(\alpha)}{(k+1)^2}}$$

[4] Die Lösung $\bar{v}_2 = 0$ dürfen wir vernachlässigen wie wir weiter oben erklärt haben.

[5] **Achtung:** Der Taschenrechner gibt als Ergebnis bei $\tan^{-1}$ in der Regel einen Winkel zwischen $-90°$ und $90°$ aus. Ist das Ergebnis positiv oder Null, dann ist der Winkel korrekt. Ist das Ergebnis negativ, dann muss man $180°$ hinzuzählen, um den richtigen Winkel zu erhalten.