

## Integralrechnung

### Teil 2: Stammfunktion und Flächenberechnung

---

## 3 Erläuternde Beispiele

### 3.1 Erste einfache Beispiele

Die folgenden Beispiele illustrieren die Idee, die wir verfolgen sehr gut.

**Beispiel 1.** Wir betrachten die konstante Funktion  $f(x) = 3$ . Eine Stammfunktion ist gegeben durch

$$F(x) = 3x.$$

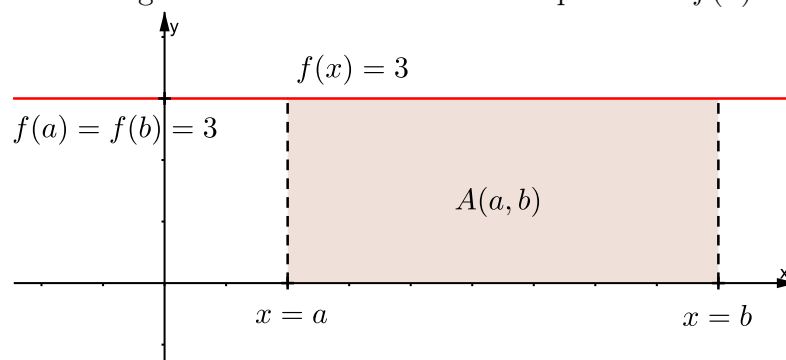
Weiter sehen wir uns die Fläche unter dem Graphen von  $f$  zwischen den  $x$ -Werten  $a < b$  an. Den zugehörigen Flächeninhalt bezeichnen wir mit  $A(a, b)$ , siehe Abb. 1. Da die Fläche ein Rechteck mit der Höhe 3 und der Breite  $b - a$  ist, haben wir

$$A(a, b) = 3(b - a).$$

Ebenso ist aber auch

$$F(b) - F(a) = 3b - 3a = 3(b - a).$$

Abbildung 1: Die Fläche unter dem Graphen von  $f(x) = 3$

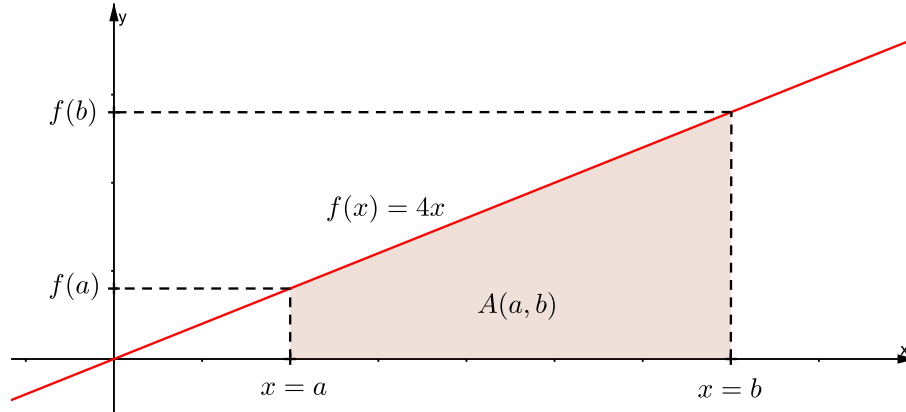


**Beispiel 2.** Als zweites Beispiel ist  $f(x) = 4x$  eine lineare Funktion. Eine Stammfunktion ist gegeben durch

$$F(x) = 2x^2.$$

Auch hier sehen wir uns die Fläche unter dem Graphen von  $f$  zwischen den  $x$ -Werten  $0 < a < b$  an und bezeichnen den zugehörigen Flächeninhalt mit  $A(a, b)$ , siehe Abb. 2.

Abbildung 2: Die Fläche unter dem Graphen von  $f(x) = 4x$



Die Fläche ist ein Parallelogramm dessen Ober- und Unterseite die Längen  $f(a) = 4a$  und  $f(b) = 4b$  haben und dessen Höhe  $b - a$  ist. Damit ist

$$A(a, b) = \frac{4b + 4a}{2} \cdot (b - a) = 2(b + a)(b - a) = 2(b^2 - a^2).$$

Ebenso ist aber auch

$$F(b) - F(a) = 2b^2 - 2a^2 = 2(b^2 - a^2).$$

In beiden Beispielen 1 und 2 haben wir also

$$A(a, b) = F(b) - F(a).$$

### 3.2 Eine genauere Untersuchung der Fläche

Um zu überprüfen, ob die Beziehung zwischen Fläche und Stammfunktion am Ende von Abschnitt 3.1 immer gilt, sehen wir uns das zweite Beispiel nochmal genauer an:

**Beispiel 3.** Wir betrachten weiter die Funktion  $f(x) = 4x$  mit der Stammfunktion  $F(x) = 2x^2$ . Dieses mal konzentrieren wir uns auf den Graphen von  $f(x)$  zwischen den  $x$ -Werten  $a < 0 < b$  und die Fläche, die mit der  $x$ -Achse gebildet wird, siehe Abb. 3.

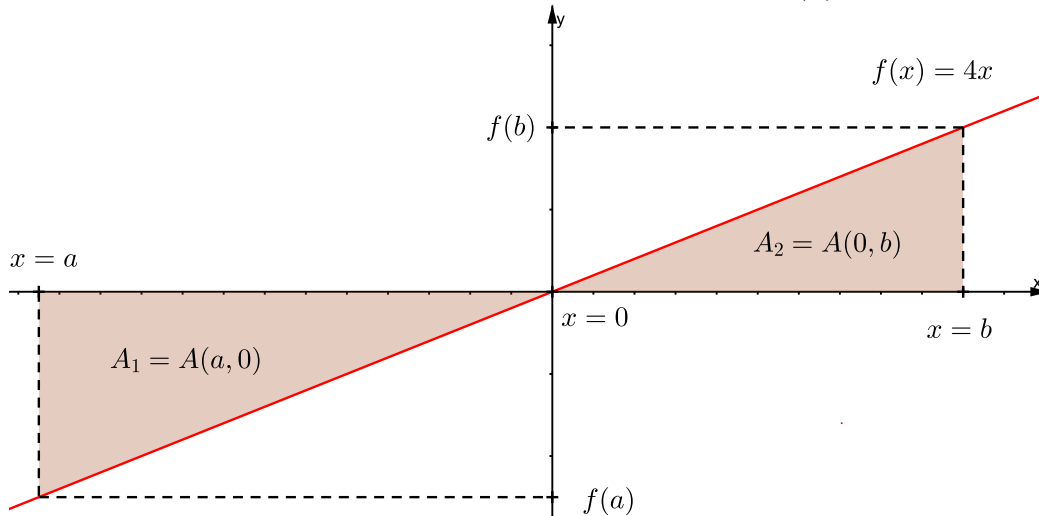
Die Gesamtfläche  $A(a, b)$  setzt dieses Mal aus zwei Teilflächen  $A_1 = A(a, 0)$  und  $A_2 = A(0, b)$  zusammen. Beide Teilflächen sind Dreiecksflächen: die erste hat die Höhe  $f(b) = 4b$  und die Grundseite  $b$  und die zweite die Höhe  $-f(a) = -4a$  und die Grundseiten  $-a$  (weil  $a < 0$  und  $f(a) < 0$  sind).

Damit ist

$$A(a, 4) = A_1 = \frac{(-4a) \cdot (-a)}{2} = 2a^2,$$

$$A(4, b) = A_2 = \frac{4b \cdot b}{2} = 2b^2.$$

Abbildung 3: Die Fläche unter dem Graphen von  $f(x) = 4x - 1$



Damit erhalten wir zusammen

$$A(a, b) = A_1 + A_2 = 2b^2 + 2a^2.$$

Im Gegensatz dazu haben wir

$$F(b) - F(a) = 2b^2 - 2a^2,$$

sodass die am Ende von Abschnitt 3.1 aus den ersten beiden Beispielen gewonnene Beziehung zwischen Flächeninhalt und Stammfunktion nicht allgemein gültig sein kann.

Aber sehen wir genauer hin:

- Es ist für den Teil  $A_2$ :

$$A(0, b) = 2b^2 \text{ und ebenso } F(b) - F(0) = 2b^2 - 2 \cdot 0^2 = 2b^2,$$

sodass für diese Teilfläche wieder

$$A(4, b) = F(b) - F(4)$$

gilt.

- Für den Teil  $A_1$  ergibt eine analoge Rechnung

$$A(a, 0) = 2a^2 \text{ aber } F(0) - F(a) = 2 \cdot 0^2 - 2a^2 = -2a^2,$$

sodass für diese Teilfläche nun

$$A(a, 4) = -(F(4) - F(a))$$

gilt.

**Zusammenfassung 4.** Wie die Beispiele 1, 2 und 3 zeigen, ist die nach Beispiel 2 eingerahmte Formel nicht immer gültig.

- Sie scheint korrekt zu sein, für Flächen, die oberhalb der  $x$ -Achse liegen.
- Sie scheint jedoch für Flächen unterhalb der  $x$ -Achse das richtige Ergebnis nur bis auf ein Vorzeichen zu geben.

## 4 Die allgemeine Formulierung

### 4.1 Die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der $x$ -Achse

Dass die Zusammenfassung der obigen Beispiel tatsächlich korrekt ist, werden wir in einem späteren Abschnitt begründen. Wir fassen hier lediglich zusammen:

#### Die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der $x$ -Achse

- Gegeben ist eine Funktion  $f(x)$  und eine zugehörige Stammfunktion  $F(x)$ .

Weiter sind zwei  $x$ -Werte  $a < b$  gegeben, sodass der Graph von  $f(x)$  zwischen  $a$  und  $b$  ganz auf einer Seite der  $x$ -Achse liegt.

Dann lässt sich der Flächeninhalt  $A(a, b)$  der Fläche, die zwischen  $a$  und  $b$  vom Graphen der Funktion  $f(x)$  und der  $x$ -Achse eingeschlossen wird, mit Hilfe der Werte der Stammfunktion an  $a$  und  $b$  berechnen:

$$A(a, b) = |F(b) - F(a)|$$

Siehe dazu Abb. 4 (oben).

- Besteht die Fläche zwischen dem Graphen von  $f(x)$  und der  $x$ -Achse aus mehreren Teilen, dann muss man für alle Teilflächen die Rechnung aus dem ersten Punkt durchführen. Anschließend muss man alle Teilstücke addieren, siehe Abb. 4 (unten).

Dazu muss man in der Regel die Nullstellen der Funktion  $f(x)$  berechnen.

**Beispiel 5.** Zwischen  $a = -1$  und  $b = 12$  liegt der Graph der Funktion  $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x + 22$  ganz oberhalb der  $x$ -Achse, siehe Abb. 4.

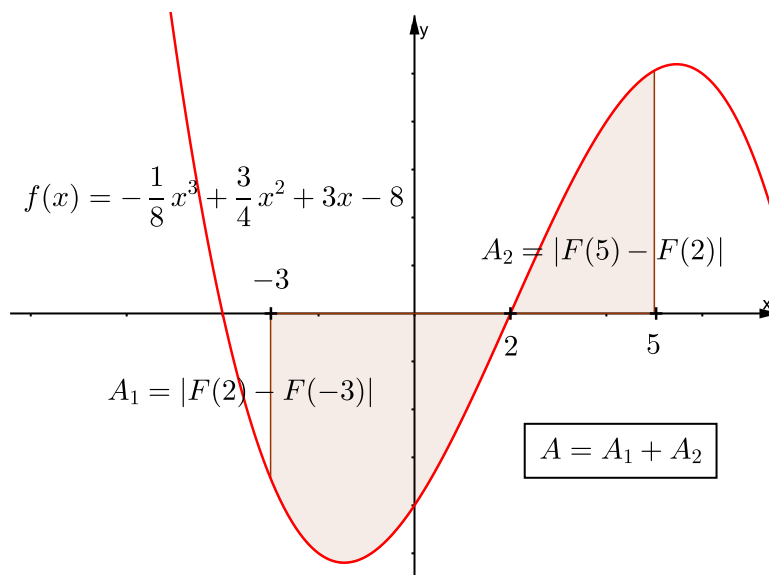
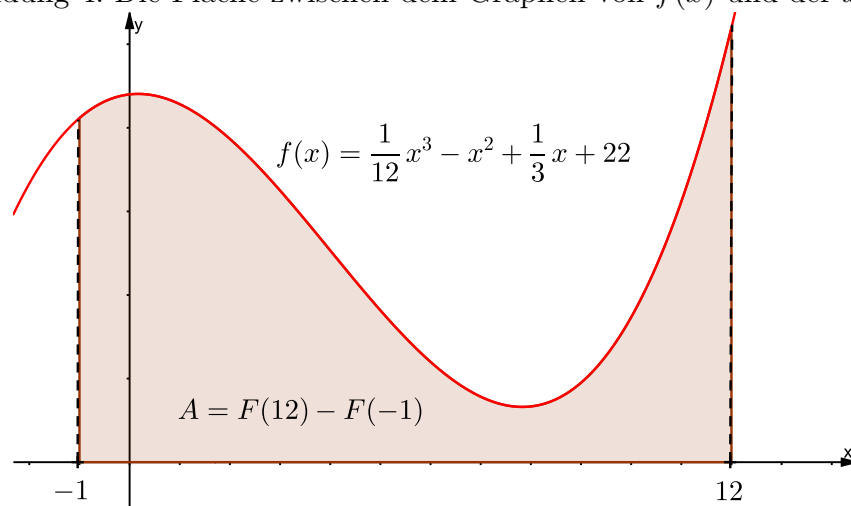
Eine Stammfunktion von  $f(x)$  ist

$$F(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + 22x.$$

Damit ist der Flächeninhalt der Fläche, die der Graph von  $f(x)$  zwischen  $a = -1$  und  $b = 12$  mit der  $x$ -Achse einschließt:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F(12) - F(-1)}} &= \left( \frac{1}{48} \cdot 12^4 - \frac{1}{3} \cdot 12^3 + \frac{1}{6} \cdot 12^2 + 22 \cdot 12 \right) \\ &\quad - \left( \frac{1}{48} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + \frac{1}{6} \cdot (-1)^2 + 22 \cdot (-1) \right) \\ &= (432 - 576 + 24 + 264) - \left( \frac{1}{48} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 22 \right) \\ &\approx \underline{\underline{165,48}} \end{aligned}$$

Abbildung 4: Die Fläche zwischen dem Graphen von  $f(x)$  und der  $x$ -Achse



## 4.2 Die Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

Die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  erhält man als Differenz der entsprechenden Flächen mit der  $x$ -Achse.

Hierbei ist entscheidend, ob der Graph der Funktion  $f(x)$  ganz "über" oder "unter" dem Graphen von  $g(x)$  liegt, oder, ob sich beide Graphen schneiden und die Fläche zerteilt wird.

- Gegeben sind zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  und zwei zugehörige Stammfunktionen  $F(x)$  und  $G(x)$ .

Weiter sind zwei  $x$ -Werte  $a < b$  gegeben, sodass der Graph von  $f(x)$  zwischen  $a$  und  $b$  ganz oberhalb oder ganz unterhalb des Graphen von  $g(x)$  liegt.

Dann lässt sich der Flächeninhalt  $A(a, b)$  der Fläche, die zwischen  $a$  und  $b$

von den Graphen der Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  eingeschlossen wird, mit Hilfe der Werte der Stammfunktionen an  $a$  und  $b$  berechnen:

$$\begin{aligned} A(a, b) &= |(F(b) - F(a)) - (G(b) - G(a))| \\ &= |(F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a))| \end{aligned}$$

Siehe auch Abb. 5 (oben).

- Besteht die Fläche zwischen dem Graphen von  $f(x)$  und dem von  $g(x)$  aus mehreren Teilen, dann muss man für alle Teilflächen die Rechnung aus dem ersten Punkt durchführen. Anschließend muss man alle Teilstücke addieren, siehe Abb. 5 (unten).

Dazu muss man in der Regel die  $x$ -Werte der Schnittpunkte von  $f(x)$  und  $g(x)$  berechnen.

Abbildung 5: Die Fläche zwischen den Graphen von  $f(x)$  und  $g(x)$

