Frank Klinker

Integralrechnung

Teil 3: Das Integral

5 Das Integral einer Funktion

Wie wir im Zusammenhang mir der Flächenrechnung sahen, hat die Differenz zweier Werte einer Stammfunktion $F(x)$ zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ eine besondere Bedeutung.

Deshalb bekommt diese Differenz einen eigenen Namen und ein eigenes Symbol:

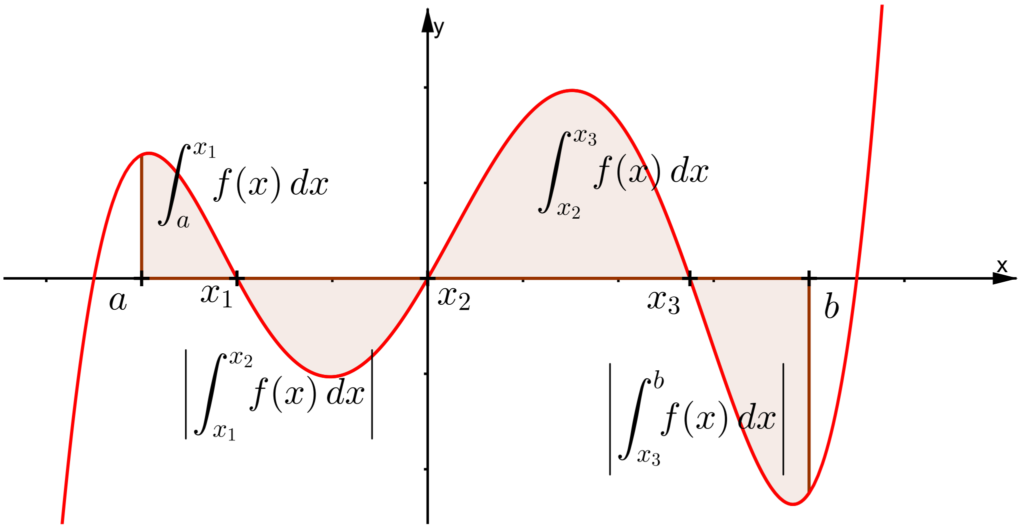
> **Das Integral einer Funktion** $f(x)$
>
> Wir sehen uns einen Funktion $f(x)$ zwischen den Werten $a \leq x \leq b$ an. Dazu sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.
>
> Das **Integral der Funktion** $f(x)$ **in den Grenzen von** a **und** b ist definiert durch
> $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$
> und ist unabhängig von der gewählten Stammfunktion.

Die Berechnung der Flächeninhalte kann man mit dem Integral wie folgt formulieren:

Bemerkung 1. Für eine Funktion $f(x)$ bezeichnet $A(a,b)$ den Flächeninhalt zwischen den x-Werten $a < b$ und der Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse

1. Für eine positive Funktion $f(x)$ ist
$$A(a,b) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$
2. Für eine negative Funktion $f(x)$ ist
$$A(a,b) = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\,.$$
3. Ist $f(x)$ nicht überall positiv oder negativ, dann gibt es x-Werte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k$ zwischen a und b, an denen $f(x)$ das Vorzeichen wechselt. Dann ist
$$A(a,b) = \left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_k}^{b} f(x)\,dx\right|$$

Abbildung 1: Zu Bemerkung 1.2



Bemerkung 2. Für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bezeichnet $A(a,b)$ den von den Graphen eingeschlossenen Flächeninhalt zwischen den x-Werten $a < b$

1. Ist $f(x) \geq g(x)$ zwischen a und b, so gilt

$$A(a,b) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

2. Wenn nicht überall $f(x) \geq g(x)$ gilt, dann gibt es x-Werte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k$ zwischen a und b, wo $f(x)$ und $g(x)$ sich schneiden. Dann gilt

$$\begin{aligned} A(a,b) = &\left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx - \int_a^{x_1} g(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx\right| \\ &+ \ldots + \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_k}^{b} f(x)\,dx - \int_{x_k}^{b} g(x)\,dx\right| \end{aligned}$$

Bemerkung 1 ist ein Spezialfall von Bemerkung 2. Das sieht man, wenn man die x-Achse mit Hilfe der Funktion $g(x) = 0$ beschreibt.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

6 Zusammenfassung und Ausblick

- Wir haben hier das Integral einer Funktion $f(x)$ mit Hilfe einer gegebenen Stammfunktion $F(x)$ eingeführt.
- Wir haben anhand von Beispielen gesehen, dass das Integral (im wesentlichen) den Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ angibt.
- Wir haben vorweggenommen, dass wir die Fläche immer so berechnen können.

Wir werden uns in einem späteren Abschnitt folgender Umkehrung dieser Idee widmen:

- Mit Hilfe des Flächeninhalts der Fläche unter dem Graphen einer Funktion $f(x)$, werden wir eine neue Funktion definieren
- Von dieser neuen Funktion zeigen wir, dass es eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.
- Das liefert uns dann die Begründung dafür, dass wir die Fläche unter einem Graphen tatsächlich immer mit einer Stammfunktion berechnen können.