Frank Klinker

Berechnung des Kegelvolumens mit Hilfe einer Zerlegung in kleine Zylinder

1 Nützliche Summenformeln

1.1 Die Summe aufeinanderfolgender Zahlen

$$\boxed{1+2+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

Wir berechnen das Doppelte der gesuchten Summe und erhalten:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & + & 2 & +\ldots+ & (n-1) & + & n & \\ + & n & + & (n-1) & +\ldots+ & 2 & + & 1 & \\ = & (n+1) & + & (n+1) & +\ldots+ & (n+1) & + & (n+1) & = n(n+1) \end{array}$$

1.2 Die Summe aufeinanderfolgender gerader Zahlen

$$\boxed{2+4+\ldots+(2n-2)+2n=n(n+1)}$$

Es ist

$$\begin{aligned} 2+4+\ldots+(2n-2)+2n &= 2\cdot 1+2\cdot 2+\ldots 2(n-1)+2n \\ &= 2\big(1+2+\ldots+(n-1)+n\big) \\ &= 2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1) \end{aligned}$$

1.3 Die Summe aufeinanderfolgender ungerader Zahlen

$$\boxed{1+3+\ldots+(2n-3)+(2n-1)=n^2}$$

Wir nutzen die vorherigen Ergebnisse und berechnen:

$$\begin{aligned} & 1+3+\ldots+(2n-3)+(2n-1) \\ = & \big(1+2+\ldots+(2n-1)+2n\big)-\big(2+4+\ldots(2n-2)+2n\big) \end{aligned}$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 1. September 2023

$$
\begin{aligned}
&\overset{1.1,1.2}{=} \frac{2n(2n+1)}{2} - n(n+1) \\
&= n(2n+1) - n(n+1) \\
&= n^2
\end{aligned}
$$

1.4 Die Summe aufeinanderfolgender Quadratzahlen

$$
\boxed{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}
$$

Wieder nutzen wir zur Bestimmung der Summe die vorigen Ergebnisse:

$$
\begin{aligned}
& 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 \\
\overset{1.3}{=}\ & 1 + (1+3) + \ldots + \big(1 + 3 + \ldots + (2n-3)\big) + \big(1 + 3 + \ldots + (2n-1)\big) \\
=\ & n \cdot 1 + (n-1) \cdot 3 + (n-2) \cdot 5 + \ldots + 2 \cdot (2n-3) + 1 \cdot (2n-1) \\
=\ & (n-0)(2 \cdot 0 + 1) + (n-1)(2 \cdot 1 + 1) + (n-3)(2 \cdot 2 + 1) + \ldots \\
& \ldots + (n-(n-2))(2(n-2)+1) + (n-(n-1))(2(n-1)+1) \\
=\ & (2n \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 + n - 0) \\
& + (2n \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 + n - 1) \\
& + (2n \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 + n - 2) \\
& + \ldots \\
& + (2n(n-2) - 2(n-2)^2 + n - (n-2)) \\
& + (2n(n-1) - 2(n-1)^2 + n - (n-1)) \\
=\ & 2n\big(1 + 2 + \cdots + (n-1)\big) - 2\big(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\big) \\
& + n \cdot n - \big(1 + 2 + \cdots + (n-1)\big) \\
\overset{1.1}{=}\ & -2\big(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2\big) + 3n^2 + (2n-1)\frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} \\
=\ & -2\big(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2\big) + 3n^2 + (2n-1)\frac{(n-1)n}{2} \\
=\ & -2\big(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2\big) + \frac{n}{2}\big(6n + (2n-1)(n-1)\big) \\
=\ & -2\big(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2\big) + \frac{n}{2}\big(2n^2 + 3n + 1\big) \\
=\ & -2\big(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2\big) + \frac{n}{2}(n+1)(2n+1)
\end{aligned}
$$

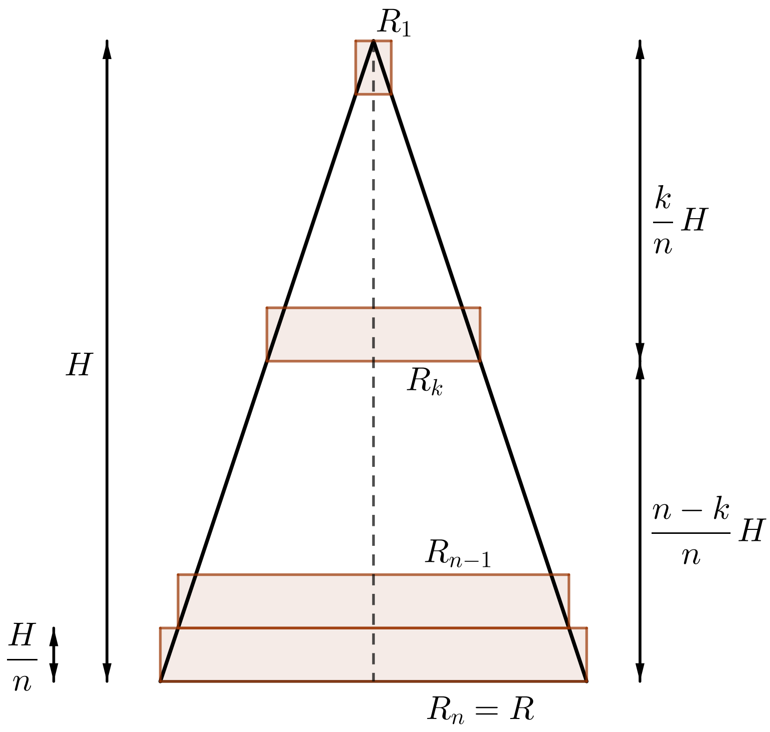
Bringt man die gesuchte Summe auf eine Seite, dann ergibt sich schließlich

$$
3\big(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2\big) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}
$$

2 Das Kegelvolumen mit Hilfe einer Zerlegungsmethode

Wir nähern das Kegelvolumen durch die Summe der Volumen von n kleinen Zylinder an, siehe Abbildung 1.

Abbildung 1: Die Zerlegung des Kegels mit Hilfe von n Zylindern



Dieses Volumen ist

$$V = \pi R_1^2 \frac{H}{n} + \pi R_2^2 \frac{H}{n} + \ldots + \pi R_{n-1}^2 \frac{H}{n} + \pi R_n^2 \frac{H}{n}\,.$$

Mit Hilfe des Strahlensatzes erhalten wir die Radien der kleinen Zylinder

$$\frac{R_k}{R} = \frac{\frac{k}{n}H}{H} \iff R_k = \frac{k}{n}R\,.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
V &= \pi\left(\frac{1}{n}R\right)^2\frac{H}{n} + \pi\left(\frac{2}{n}R\right)^2\frac{H}{n} + \ldots + \pi\left(\frac{n-1}{n}R\right)^2\frac{H}{n} + \pi\left(\frac{n}{n}R\right)^2\frac{H}{n} \\
&= \pi\frac{1^2}{n^2}R^2\frac{H}{n} + \pi\frac{2^2}{n^2}R^2\frac{H}{n} + \ldots + \pi\frac{(n-1)^2}{n^2}R^2\frac{H}{n} + \pi\frac{n^2}{n^2}R^2\frac{H}{n} \\
&= \pi R^2 H\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2) \\
&\overset{1.4}{=} \pi R^2 H\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \pi R^2 H\frac{1}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi R^2 H \frac{1}{6} \cdot \frac{2n^2+3n+1}{n^2} \\
&= \pi R^2 H \frac{1}{6} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \pi R^2 H \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{n} + \frac{1}{6n^2}\right).
\end{aligned}
$$

Zerteilen wir den Kegel jetzt in sehr viele Zylinder, d. h. n ist sehr groß, dann werden die Summanden $\frac{2}{n}$ und $\frac{1}{6n^2}$ sehr klein, d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{6n^2} = 0$. Für immer größer werdende n bleibt in der Klammer nur der erste Summand übrig.

Für das Kegelvolumen bekommen wir damit für immer größer werdende n

$$
\boxed{V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H}
$$