Frank Klinker

Rechnen mit Zehnerpotenzen

1 Kommazahlen

Im Alltag nutzen wir **Kommazahlen** ganz natürlich – etwa beim Umgang mit Geldbeträgen oder Entfernungen.

Hier begegnen uns Kommazahlen, wenn wir deren Einheit ändern möchten:

Beispiel 1.

$$\begin{aligned} 125\,ct &= 1{,}25\,€\,, \qquad & 12890\,mm &= 12{,}89\,m\,,\\ 50\,cm &= 0{,}5\,m\,, & 12000\,m^2 &= 1{,}2\,ha\,. \end{aligned}$$

Wenn zwei ganze Zahlen nicht durcheinander teilbar sind, dann liefert uns das Verfahren der schriftlichen Division automatisch als Ergebnis eine Kommazahl.

In diesem Fall darf der Divisor dann auch kleiner sein, als der Dividend.

Beispiel 2.

$$\begin{aligned} &100 : 40 = 2{,}5\,, \qquad && 620 : 125 = 4{,}96\,, \qquad && 8002 : 250 = 3{,}208\,,\\ &1 : 2 = 0{,}5\,, && 85 : 1000 = 0{,}085\,, && 63300 : 3000 = 21{,}10\,. \end{aligned}$$

Wir lesen Kommazahlen, indem wir die vor dem Komma stehende Zahl wie üblich aussprechen und die hinter dem Komma stehenden Ziffern nacheinander anfügen:

Beispiel 3.

$$\begin{aligned} 1{,}40 &= \text{eins-Komma-vier-null}\\ 21{,}237 &= \text{einundzwanzig-Komma-zwei-drei-sieben}\\ 1402{,}013 &= \text{eintausendvierhundertzwei-Komma-null-eins-drei}\\ 0{,}40350 &= \text{null-Komma-vier-null-drei-fünf-null} \end{aligned}$$

> Hat eine Kommazahl hinter dem Komma am Ende Nullen, dann darf man diese weglassen ohne, dass sich die Zahl ändert.
>
> Ebenso darf man bei einer Kommazahl hinter dem Komma am Ende Nullen hinzufügen ohne, dass sich die Zahl ändert.

Beispiel 4.

$$1{,}40 = 1{,}4 = 1{,}40000\,, \qquad 0{,}01 = 0{,}010 = 0{,}0100\,, \qquad 21 = 21{,}0 = 21{,}000\,.$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

2 Zehnerpotenzen

Eine Zahl heißt **Zehnerpotenz**, wenn ihre erste Ziffer eine *Eins* ist und alle folgenden Ziffern *Nullen.*

Beispiel 5.

$$10,\ 100,\ 1000,\ 1000000 \ \text{ u.s.w. sind Zehnerpotenzen}$$

Merksatz 1 zum Rechnen mit Kommazahlen und Zehnerpotenzen

Multipliziert man eine Zahl mit einer Zehnerpotenz, dann bekommt man das Ergebnis, indem man das Komma der Zahl um die Anzahl der Nullen der Zehnerpotenz nach rechts verschiebt.

Dazu muss man manchmal, um das Komma verschieben zu können, an das Ende der Kommazahlen Nullen hinzuschreiben.

Beispiel 6.

$$1{,}41 \cdot 10 = 14{,}1$$
$$31{,}4 \cdot 100 = 31{,}400 \cdot 100 = 3140{,}0 = 3140$$
$$1{,}31 \cdot 10000 = 1{,}31000 \cdot 10000 = 13100{,}0 = 13100$$
$$3 \cdot 100 = 3{,}000 \cdot 100 = 300{,}0 = 300$$

Merksatz 2 zum Rechnen mit Kommazahlen und Zehnerpotenzen

Teilt man eine Zahl durch eine Zehnerpotenz, dann bekommt man das Ergebnis, indem man das Komma der Zahl um die Anzahl der Nullen der Zehnerpotenz nach links verschiebt.

Dazu muss man manchmal, um das Komma verschieben zu können, am Anfang der Zahl Nullen ergänzen

Beispiele

$$10300 : 10 = 10300,0 : 100 = 103,000 = 103$$
$$13,5 : 10 = 1,35$$
$$12{,}78 : 100 = (0)12{,}78 : 100 = 0{,}1278$$
$$1 : 1000 = (000)1{,}0 : 1000 = 0{,}0010 = 0{,}001$$

3 Zehnerpotenzen in Potenzschreibweise

Wer mit dem Rechnen mit Potenzen bereits vertraut ist, für den ist das Folgende mathematische ganz natürlich. Für alle anderen ist das Folgende als Kurzschreibweise für den Umgang mit Zehnerpotenzen zu verstehen.

Wenn wir Größen ineinander umrechnen wollen, dann müssen wir nicht selten mit sehr hohen Zehnerpotenzen multiplizieren oder durch hohe Zehnerpotenzen dividieren, z. B.

$$4205\, m^3 = 4205 \cdot 1000000\, cm^3 = 4205000000\, cm^3$$

$$45\, \mu g = 45 : 1000000000\, kg = 0{,}000000045\, kg$$

Man sieht hier bereits, dass fast die gesamte Zahl aus Nullen besteht. Um das zu vereinfachen führen wir eine ökonomische Schreibweise ein.

Zunächst schreiben wir Zahlen etwas komplizierter:

- Eine Zahl, die größer oder gleich 10 ist zerlegen wir in das Produkt einer "kleinen Zahl" zwischen 0 und 10 und eine Zehnerpotenz, z.B.

$$4\,205000000 = 4{,}205 \cdot 1000000000$$

$$123 = 1{,}23 \cdot 100$$

$$70005 = 7{,}0005 \cdot 10000$$

- Eine Zahl, die kleiner als 1 ist zerlegen wir in einen Quotienten einer "großen Zahl" zwischen 0 und 10 und eine Zehnerpotenz, z.B.

$$0{,}0030456 = 3{,}0456 : 100$$

$$0{,}000000719 = 7{,}19 : 10000000$$

$$0{,}000506 = 5{,}06 : 1000$$

Nun führen wir die folgende Schreibweise ein:

- Statt "$\cdot$ 100000000" schreiben wir "$\cdot\ 10^8$". Das heißt wir schreiben die Anzahl der Nullen der Zehnerpotenz als Exponenten an die 10:

$$\cdot\ 100000000 \longrightarrow \cdot\ 10^8$$

- Statt ": 10000000000" schreiben wir "$\cdot\ 10^{-10}$". Das heißt wir schreiben die Anzahl der Nullen der Zehnerpotenz als negativen Exponenten an die 10:

$$: 10000000000 \longrightarrow \cdot\ 10^{-10}$$

Damit schreiben sich die sechs Beispiele von oben als

$$\begin{aligned} 4\,205000000 &= 4{,}205 \cdot 10^9 \\ 123 &= 1{,}23 \cdot 10^2 \\ 70005 &= 7{,}0005 \cdot 10^5 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} 0{,}0030456 &= 3{,}0456 \cdot : 10^{-2} \\ 0{,}000000719 &= 7{,}19 \cdot 10^{-7} \\ 0{,}000506 &= 5{,}06 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

> Zwei Zahlen lassen sich in der Potenzschreibweise leicht miteinander vergleichen:
>
> Die Zahl mit dem größeren Exponenten ist die größere Zahl.

Beispiel 7.

a) Der Mond besitzt eine Masse von $m_M \approx 73460000000000000000000\,kg$ und die Erde eine von $m_E \approx 5972000000000000000000000\,kg$. Dass nun tatsächlich $m_E > m_M$ ist, sieht man in der Potenzschreibweise leichter:

$$m_M = 7{,}346 \cdot 10^{22}\,kg \quad \text{und} \quad m_E \approx 5,972 \cdot 10^{24}\,kg\,.$$

b) Ein Elektron hat die Masse $m_e \approx 0{,}000000000000000000000000000000911\,kg$ und ein Proton die Masse $m_p \approx 0{,}00000000000000000000000000101\,kg$. Dass nun wirklich $m_e < m_p$ ist, sieht man auch wieder sehr gut in der Potenzschreibweise:

$$m_p \approx 1,01 \cdot 10^{-27}\,kg \quad \text{und} \quad m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg\,.$$

Die sparsame Schreibarbeit und die einfache Vergleichbarkeit sind nicht die einzigen Vorteile der Potenzschreibweise. Mit ihr kann man auch sehr einfach rechnen:

> Multipliziert man zwei Zehnerpotenzen, dann muss man lediglich die Exponenten addieren.
>
> Dividiert man zwei Zehnerpotenzen, dann muss man lediglich die Exponenten von einander abziehen.
>
> **Achtung:** In beiden Fällen muss man sorgfältig die Vorzeichen der Exponenten beachten!

Beispiel 8. Zur Multiplikation:

$$\begin{aligned} 10^{14} \cdot 10^{3} &= 10^{14+3} = 10^{17} & \qquad 10^{11} \cdot 10^{-4} &= 10^{11-4} = 10^{7} \\ 10^{-14} \cdot 10^{12} &= 10^{-14+12} = 10^{-2} & \qquad 10^{-3} \cdot 10^{9} &= 10^{-3+9} = 10^{6} \\ 10^{-2} \cdot 10^{-31} &= 10^{-2-31} = 10^{-33} & \qquad 10^{6} \cdot 10^{-10} &= 10^{6-10} = 10^{-4} \end{aligned}$$

Zur Division:

$$\begin{aligned} 10^{10} : 10^{2} &= 10^{10-2} = 10^{8} & \qquad 10^{8} : 10^{-4} &= 10^{8-(-4)} = 10^{12} \\ 10^{-10} : 10^{8} &= 10^{-10-8} = 10^{-18} & \qquad 10^{-1} : 10^{6} &= 10^{-1-6} = 10^{-7} \\ 10^{-6} : 10^{-24} &= 10^{-6-(-24)} = 10^{-18} & \qquad 10^{5} : 10^{-8} &= 10^{5-(-8)} = 10^{13} \end{aligned}$$

Das verbindet man nun mit dem Rechnen mit Zahlen:

Beispiel 9.

$$
\begin{aligned}
10400 \cdot 12000 &= 1{,}04 \cdot 10^4 \cdot 1{,}2 \cdot 10^5 \\
&= 1{,}04 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{4+5} \\
&= 1{,}248 \cdot 10^9 \\
0,0000046 \cdot 4000 &= 4{,}6 \cdot 10^{-6} \ \cdot 4 \cdot 10^3 \\
&= 4{,}6 \cdot 4 \cdot 10^{-6+3} \\
&= 18{,}4 \cdot 10^{-3} \\
&= 1{,}84 \cdot 10^1 \cdot 10^{-3} \\
&= 1{,}84 \cdot 10^{-2} \\
14850000 : 0{,}00000033 &= 1{,}458 \cdot 10^7 : \left(3{,}3 \cdot 10^{-7}\right) \\
&= 1{,}458 : 3{,}3 \cdot 10^{7-(-7)} \\
&= 0{,}45 \cdot 10^{14} \\
&= 4{,}5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{14} \\
&= 4{,}5 \cdot 10^{13} \\
0{,}0000062 : 0{,}00000004 &= 6{,}2 \cdot 10^{-6} : \left(4 \cdot 10^{-8}\right) \\
&= 6{,}2 : 4 \cdot 10^{-6-(-8)} \\
&= 1{,}55 \cdot 10^2
\end{aligned}
$$

4 Zehnerpotenzen und das Umrechnen von Größen

Wir wissen, dass beim Umrechnen von Größen die Multiplikation/Division mit Zehnerpotenzen allgegenwärtig ist. Typischerweise muss man dabei immer die Sprünge zählen, die man von einer Einheit zu nächsten gemacht hat.

In der Physik haben sich für diese Sprünge eigene Vorsilben oder Präfixe etabliert. Man startet bei der Grundeinheit und vergrößert diese oder verkleinert diese:

Bemerkung 10.

1. Die wichtigsten **Präfixe** und ihre Umrechnungsfaktoren

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{MN} \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{kN} \arrow[l, bend right, ": 1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{N} \arrow[l, bend right, ": 1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & \boxed{dN} \arrow[l, bend right, ": 10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & \boxed{cN} \arrow[l, bend right, ": 10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & \boxed{mN} \arrow[l, bend right, ": 10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{\mu N} \arrow[l, bend right, ": 1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & \boxed{nN} \arrow[l, bend right, ": 1000"']
\end{tikzcd}
$$

2. Der Vollständigkeit halber führen wir hier noch weitere Präfixe auf.

   Zwei werden zwischen der Grundeinheit und dem Kilo (k) eingefügt, alle anderen liefern weitere Vergrößerungen und Verkleinerungen:

$$
\begin{tikzcd}
YN \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & ZN \arrow[l, bend right, ": 1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & EN \arrow[l, bend right, ": 1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & PN \arrow[l, bend right, ": 1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & TN \arrow[l, bend right, ": 1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & GN \arrow[l, bend right, ": 1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & {\color{red}MN} \arrow[l, bend right, "\cdot 1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & {\color{red}kN} \arrow[l, bend right, ": 1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & hN \arrow[l, bend right, ": 10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & daN \arrow[l, bend right, ": 10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & {\color{red}N} \arrow[l, bend right, ": 10"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{\color{red}N} \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & {\color{red}dN} \arrow[l, bend right, ": 10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & {\color{red}cN} \arrow[l, bend right, ": 10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 10"'] & {\color{red}mN} \arrow[l, bend right, ": 10"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & {\color{red}\mu N} \arrow[l, bend right, ": 1000"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 1000"'] & {\color{red}nN} \arrow[l, bend right, ": 1000"'] \arrow[r, bend right, ": 1000"'] & pN \arrow[l, bend right, ": 1000"'] \arrow[r, bend right, ": 1000"'] & fN \arrow[l, bend right, ": 1000"'] \arrow[r, bend right, ": 1000"'] & aN \arrow[l, bend right, ": 1000"'] \arrow[r, bend right, ": 1000"'] & zN \arrow[l, bend right, ": 1000"'] \arrow[r, bend right, ": 1000"'] & yN \arrow[l, bend right, ": 1000"']
\end{tikzcd}
$$

Um nun zwei Einheiten von einem Ausgangspräfix in einen Endpräfix umrechnen zu können, muss man sich in dieser Übersicht nicht nur die Übergangsfaktoren der Präfixe merken, sondern auch, an welcher Position diese jeweilige Vorsilbe steht.

Eigentlich braucht man das jedoch nicht: Man kann einfacher von dem Ausgangspräfix zunächst zur Basiseinheit springen und dann zum Endpräfix. Jetzt braucht man sich nur den Faktor zur Basiseinheit merken und ob man teilen oder malnehmen muss.

Da alle Faktoren aber Zehnerpotenzen sind, nutzen wir die Potenzschreibweise, Dann erkennt man das Malnehmen oder Teilen daran, ob der Exponent positiv negativ ist:

Die sehr umfangreichen Grafiken und Tabellen werden damit zu:

Präfix	Y	Z	E	P	T	G	M	k	h	da
Faktor	10^{24}	10^{21}	10^{18}	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10^{1}
Name	Yotta	Zetta	Exa	Peta	Tera	Giga	Mega	Kilo	Hekto	Deka

Präfix	d	c	m	μ	n	p	f	a	z	y
Faktor	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{24}
Name	Dezi	Zenti	Milli	Mikro	Nano	Piko	Fempto	Atto	Zepto	Yokto

Es folgt ein Beispiel zur Umrechnung von Einheiten:

Beispiel 11. a) $\mu F \to kF$

$$
\begin{aligned}
1045000000\,\mu F &= 1{,}045 \cdot 10^{9}\,\mu F = 1{,}045 \cdot 10^{9} \cdot 10^{-6}\,F = 1{,}045 \cdot 10^{3}\,F \\
&= 1{,}045\,kF
\end{aligned}
$$

b) $M\Omega \to m\Omega$

$$
\begin{aligned}
0,00038\,M\Omega &= 3{,}8 \cdot 10^{-4}\,M\Omega = 3{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{6}\,\Omega = 3{,}8 \cdot 10^{5} \cdot 10^{-3}\,\Omega \\
&= 3{,}8 \cdot 10^{5}\,m\Omega = 38000\,m\Omega
\end{aligned}
$$

Das nächste Beispiel, zeigt, wie man die Potenzschreibweise in Formeln verwenden kann:

Beispiel 12. a) Ladung = Kapazität × Spannung ($Q = C \cdot U$)

$$\begin{aligned} 4,7\,pF \cdot 4MV &= 4{,}7 \cdot 10^{-12}\,F \cdot 4 \cdot 10^{6}\,V \\ &= 4{,}7 \cdot 4 \cdot 10^{-12+6}\,FV \\ &= 18{,}4 \cdot 10^{-6}\,C \\ &= 18{,}4\,\mu C \end{aligned}$$

a) Spannung = Stromstärke × Widerstand ($U = R \cdot I$)

$$\begin{aligned} 5\,k\Omega \cdot 850\,\mu A &= 5 \cdot 10^{3}\,\Omega \cdot 850 \cdot 10^{-6}\,A \\ &= 5 \cdot 850 \cdot 10^{3-6}\,A\Omega \\ &= 4250 \cdot 10^{-3}\,V \\ &= 4{,}25\,V \end{aligned}$$

a) Widerstand = Spannung / Stromstärke $\left(R = \frac{U}{I}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{1608\,kV}{80\,mA} &= \frac{1608 \cdot 10^{3}}{80 \cdot 10^{-3}}\,\frac{V}{A} \\ &= \frac{1608}{80} \cdot 10^{3-(-3)}\,\frac{V}{A} \\ &= 20{,}1 \cdot 10^{6}\,\Omega \\ &= 20{,}1\,M\Omega \end{aligned}$$