Frank Klinker

Grundlagen: Gleichförmige Kreisbewegungen

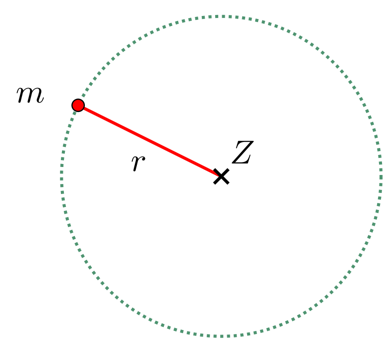
Teil 3: Rotationsenergie

5 Rotationsenergie von Massepunkten

5.1 Rotationsenergie eines Massepunktes

Wir betrachten einen Körper der Masse m, der sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewegt. Die Ausdehnung des Körpers sei sehr klein im Vergleich zum Radius der Kreisbahn, sodass wir den Ort des Körpers als Punkt ansehen können. In dieser Situation spricht man von einem **Massepunkt** der Masse m, siehe Abb. 1

Abbildung 1: Ein rotierender Massepunkt



Wir haben gesehen, dass nicht die Bahngeschwindigkeit v sondern die Kreisfrequenz ω die sinnvolle Größe zur Beschreibung einer Kreisbewegung ist.

Um nun die Bewegungsenergie des rotierenden Masseteilchens zu berechnen erinnern wir uns daran, dass diese durch $E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$. gegeben ist. Hier setzen wir $v = r\omega$ ein, und erhalten

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2.$$

Der Ausdruck für die Energie, den wir erhalten heißt **Rotationsenergie** des Massepunktes:

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}J_\bullet\omega^2 \quad \text{mit} \quad J_\bullet = mr^2\,.$$

Aus Gründen, die später deutlich werden nennen wir den zur Abkürzung verwendeten Ausdruck $J_\bullet = mr^2$ den **Trägheitsmoment des Massepunktes** (bezüglich des Drehzentrums Z).

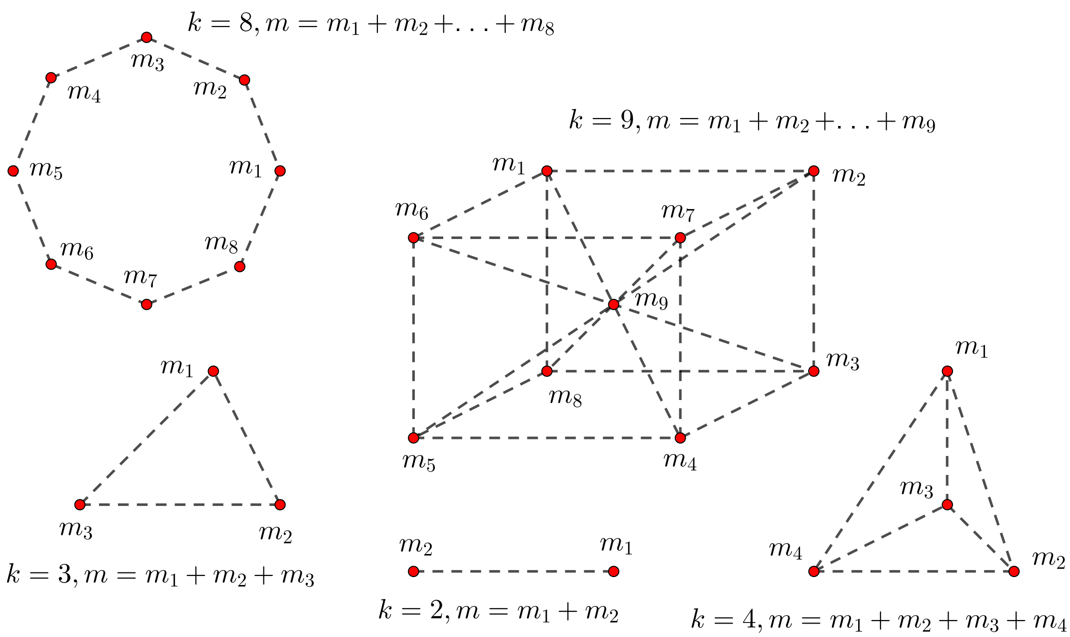
Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

5.2 Rotationsenergie einer Verteilung von Massepunkten

Wir gehen nun über zu einer **Massepunktverteilung**. Darunter verstehen wir eine feste Anordnung von k Massepunkten $m_1, \ldots, m_k$. Feste Anordnung wiederum bedeutet, dass wir uns die Massepunkte untereinander starr verbunden vorstellen, wobei die Verbindungen selbst keine Masse besitzen, siehe Abb. 2. Die Gesamtmasse m einer Massepunktverteilung aus k Massepunkten ist die Summe aller Teilmassen, also

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_{k-1} + m_k = \sum_{i=1}^{k} m_i$$

Abbildung 2: Massepunktverteilungen



Wir lassen nun ein solche Massepunktverteilung $m_1, \ldots, m_k$ um ein gemeinsames Zentrum Z rotieren. Dabei hat jeder einzelne Massepunkt seinen eigenen festen Abstand r_i vom Drehzentrum, siehe Abb. 3.

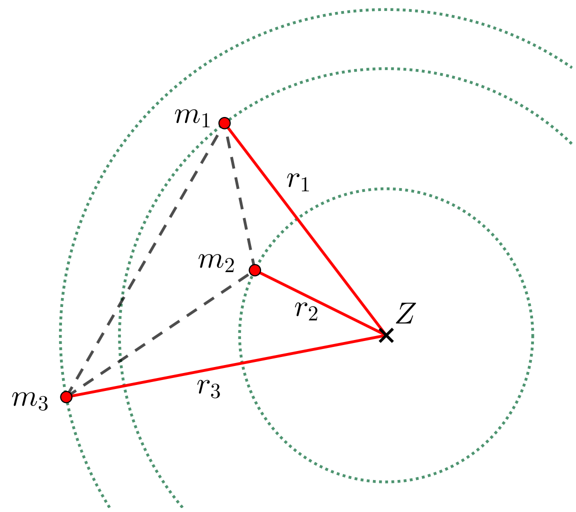
Die Bewegungsenergie dieser Massepunktverteilung setzt sich nun zusammen aus den Energien der einzelnen Massepunkte:

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},1} + E_{\text{kin},2} + \ldots + E_{\text{kin},k-1} + E_{\text{kin},k}\,.$$

Da sich jeder Massepunkt auf einem eigenen Kreis bewegt, hat jeder seine eigene Bahngeschwindigkeit v_i. Für diese gilt $v_i = r_i\omega$, was wir nun ausnutzen:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \ldots + \frac{1}{2}m_{k-1} v_{k-1}^2 + \frac{1}{2}m_k v_k^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1(r_1\omega)^2 + \frac{1}{2}m_2(r_2\omega)^2 + \ldots + \frac{1}{2}m_{k-1}(r_{k-1}\omega)^2 + \frac{1}{2}m_k(r\omega)_k^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1 r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2\omega^2 + \ldots + \frac{1}{2}m_{k-1} r_{k-1}^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_k r_k^2\omega^2
\end{aligned}$$

Abbildung 3: Eine rotierende Massepunktverteilung



$$= \frac{1}{2}\Big(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_{k-1} r_{k-1}^2 + m_k r_k^2\Big)\omega^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k} m_i r_i^2\right)\omega^2$$

Der Ausdruck, den wir erhalten haben ist die Rotationsenergie der Massepunktverteilung:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J_{V\bullet}\omega^2 \quad \text{mit} \quad J_{V\bullet} = \sum_{i=1}^{r} m_i r_i^2\,.$$

Der zur Abkürzung verwendeten Ausdruck $J_{V\bullet} = \sum_{i=1}^{r} m_i r_i^2$ heißt den Trägheitsmoment der Massepunktverteilung (bezüglich des Drehzentrums Z).

6 Versuch: Bewegungsenergie rollender Zylinder

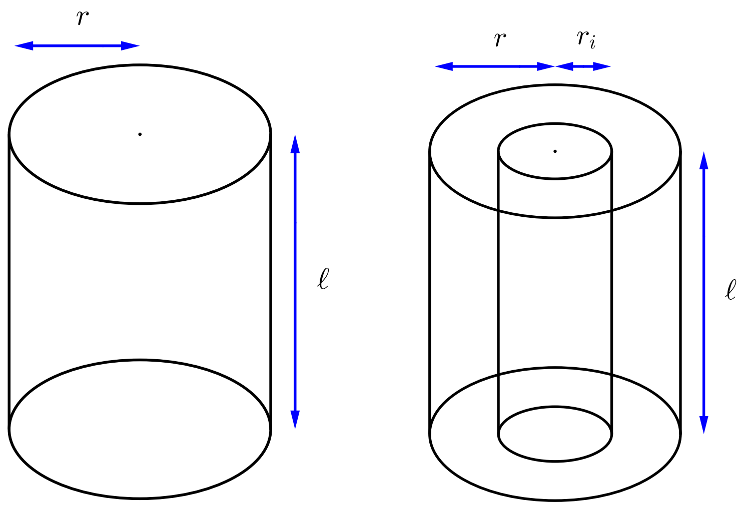
6.1 Der Versuch und seine Resultate

In einem Versuch lassen wir Zylinder eine schiefe Ebene herunterrollen. Wir messen die Geschwindigkeit, die diese Zylinder besitzen, wenn sie unten ankommen.

Wir unterscheiden dabei zwischen Vollzylindern und Hohlzylindern. Letztere haben in unserem Versuch eine sehr dünne Wandstärke, sodass wir ungefähr $r \approx r_i$ annehmen dürfen, sieh Abb. 4.

Wir wissen, dass alle Zylinder (so wie jeder andere Körper auch) gleich schnell unten ankommen würden, wenn sie reibungsfrei die Ebene heruntergleiten. Das liegt daran, dass sich in der Energiebilanz die Masse herauskürzt.

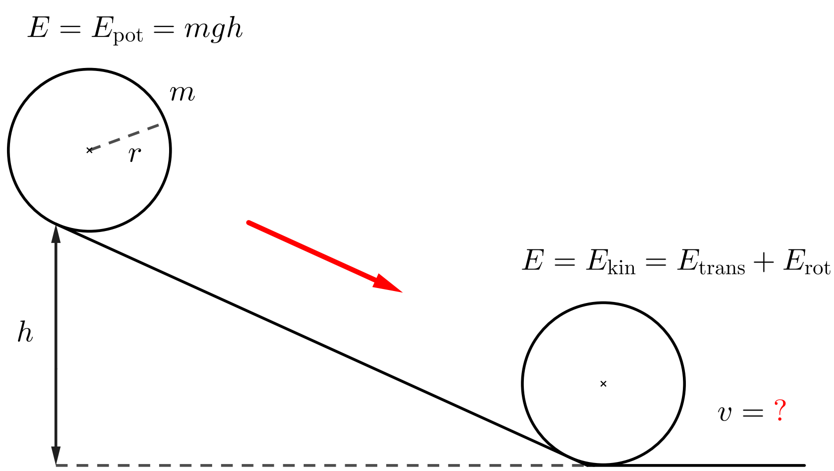
Abbildung 4: Eine rotierende Massepunktverteilung



Durch die Rollbewegung wird jedoch ein Teil der potentiellen Energie in Rotationsenergie überführt, welche die Geschwindigkeit des Zylinders dann verlangsamt.

Um die beiden Teilenergien der gesamten Bewegungsenergie auseinanderhalten zu können, sprechen wir neben der Rotationsenergie von der Translationsenergie, siehe Abb. 5. Letztere ergibt sich aus der "reinen Fortbewegung" des Zylinders zu $E_{\text{trans}} = \frac{1}{2}mv^2$.

Abbildung 5: Zylinder auf einer Rampe



Qualitative Ergebnisse:

- Alle Vollzylinder erreichen das Ende der Rampe mit der gleichen Geschwindigkeit. Das ist unabhängig vom Radius r und der von Länge ℓ.

- Alle Hohlzylinder erreichen das Ende der Rampe mit der gleichen Geschwindigkeit. Das ist unabhängig vom äußeren Radius r_a und von der Länge ℓ (hier setzen wir dünnwandige Hohlzylinder voraus).

- Die Vollzylinder sind schneller als die Hohlzylinder.

Quantitative Ergebnisse:

- Bei einer Rampenhöhe von 24,5 cm erhalten wir bei jeweils vier Messungen folgende handgestoppte Durchschnittswerte:
$$v_{\text{voll}} = 156\frac{cm}{s}\,, \quad v_{\text{hohl}} = 128\,\frac{cm}{s}\,.$$
- Die Geschwindigkeit v_{hohl} der Hohlzylinder ist wegen $\frac{156-128}{156} \approx 0{,}18$ ca. 18% geringer, als die Geschwindigkeit v_{voll} der Vollzylinder.

6.2 Analyse der Energiebilanz

Wir sehen uns nun die Energiebilanz $E_{\text{pot}} = E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}}$ etwas genauer an. Da wir über die Rotationsenergie bisher nichts wissen, machen wir den Ansatz
$$E_{\text{rot}} = \alpha \cdot\ E_{\text{trans}}\,,$$
d. h. wie sehen uns an, wie groß der Rotationsanteil der Bewegungsenergie im Vergleich zum Transalationsanteil ist. Die Energiebilanz liefert
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \alpha\cdot\frac{1}{2}mv^2 \iff \boxed{\alpha = \frac{2gh}{v^2} - 1}$$

- Die maximale Geschwindigkeit wird erreicht, wenn der Zylinder gleitet ($\alpha = 0$). In diesem Fall ist $v^2 = 2gh$, was genau das klassische Resultat der schiefen Ebene ist.
- Die Zeitmessungen aus unseren Messungen liefern (bei einer Reaktionszeit von 0,15 s)
$$\alpha_{\text{voll}} \approx 0{,}51\,, \quad \alpha_{\text{hohl}} \approx 1{,}05\,.$$
Der Hohlzylinder hat somit eine etwa doppelt so große Rotationsenergie, wie der Vollzylinder.

Um das Ergebnis mit den Erkenntnissen aus Abschnitt 5 zusammen zu bringen, schreiben wir die Rotationsenergie in Termen der Kreisfrequenz. Wir wissen, dass die Bahngeschwindigkeit des Zylindermantels jeweils der Geschwindigkeit des Zylinders entspricht. Damit ist $v = r\omega$ und weiter
$$E_{\text{rot}} = \alpha\cdot\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\alpha m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}\alpha mr^2\omega^2\,.$$
Für die Rotationsenergien von Hohl- und Vollzylinder bei Rotation um ihre Mittelachse erhalten wir damit die Werte
$$E_{\text{rot,hohl}} = \frac{1}{2}J_{\text{hohl}}\,\omega^2 \quad \text{mit} \quad J_{\text{hohl}} = \alpha_{\text{hohl}}\,mr^2 \approx mr^2$$
$$E_{\text{rot,voll}} = \frac{1}{2}J_{\text{voll}}\,\omega^2 \quad \text{mit} \quad J_{\text{voll}} = \alpha_{\text{voll}}\,mr^2 \approx \frac{1}{2}mr^2$$
Die Abkürzungen $J_{\text{hohl}} = mr^2$ und $J_{\text{voll}} = \frac{1}{2}mr^2$ heißen die **Trägheitsmomente von Hohl- und Vollzylinder** (bezogen auf ihre Mittelachse).