Frank Klinker

Kurvendiskussion

Teil 3: Spezielle Punkte ... eine Zusammenfassung

1 Einführung und Zusammenfassung

Eine **Kurvendiskussion** oder auch **Funktionsdiskussion** führt man durch, wenn man den Graph einer gegebenen Funktion $f(x)$ konstruieren möchte oder spezielle Eigenschaften des Graphen beschreiben möchte, wenn nur die Funktionsvorschrift $f(x)$ gegeben ist.

Das Ziel ist es hier, sich ein Bild über den Verlauf eines Funktionsgraphen zu machen, indem man spezielle Punkte des Graphen berechnet.

2 y-Achsenabschnitt/Schnittpunkt mit der y-Achse

Der **Schnittpunkt mit der y-Achse** S_y lässt sich immer berechnen, wenn die Stelle $x = 0$ im Definitionsbereich der Funktion $f(x)$ liegt. Den zugehörigen Funktionswert $f(0)$ heißt dann auch **y-Achsenabschnitt**:

$$\boxed{S_y\left(0/f(0)\right)}$$

3 Nullstellen/Schnittpunkte mit der x-Achse

Die **Schnittpunkte mit der x-Achse** erhält man, indem man die Gleichung $f(x) = 0$ löst:

$$\boxed{\text{löse}\quad f(x) = 0}$$

Die Lösungen der Gleichung heißen **Nullstellen** und liefern die x-Werte der Schnittpunkte mit der x-Achse. Der zugehörige y-Wert ist dann natürlich immer 0.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 4. November 2023

4 Extrempunkte: Maxima und/oder Minima

Als **Extrema** oder **Extrempunkte** bezeichnet man die Punkte des Graphen von $f(x)$, in deren Umgebung alle anderen Punkte kleinere Funktionswerte haben (**Maximum**) oder in deren Umgebung alle Punkte größere Funktionswerte haben (**Minimum**).[1]

In einem Extremum ist die Steigung neutral. Das heißt, man erhält die zugehörigen x-Werte durch Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$:

$$\boxed{\text{löse:} \quad f'(x) = 0}$$

Um nun zu entscheiden, ob tatsächlich ein Extremum vorliegt, muss man diese Lösungen genauer untersuchen. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

Vorzeichenwechselkriterium für Extrema

Eine Lösung $x = x_0$ liefert zusammen mit dem zugehörigen Funktionswert ein Extremum $\big(x_0/f(x_0)\big)$, wenn sich die Steigung von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ ändert, d. h. $f'(x)$ ändert an der Stelle x_0 sein Vorzeichen. Genauer:

- Ist $f'(x_0) = 0$, dann ist $\big(x_0)/f(x_0)\big)$ ein Maximum, wenn die Funktion links von x_0 steigt und rechts von x_0 fällt, d. h.

$$\boxed{\begin{array}{c}\big(x_0)/f(x_0)\big) \text{ ist Maximum, wenn} \\ f'(x_0) = 0 \text{ und } f'(x) > 0 \text{ für } x < x_0 \text{ und } f'(x) < 0 \text{ für } x > x_0.\end{array}}$$

- Ist $f'(x_0) = 0$, dann ist $\big(x_0)/f(x_0)\big)$ ein Minimum, wenn die Funktion links von x_0 fällt und rechts von x_0 steigt, d. h.

$$\boxed{\begin{array}{c}\big(x_0)/f(x_0)\big) \text{ ist Minimum, wenn} \\ f'(x_0) = 0 \text{ und } f'(x) < 0 \text{ für } x < x_0 \text{ und } f'(x) > 0 \text{ für } x > x_0.\end{array}}$$

  Hier muss man der praktischen Anwendung das x immer rechts und links in der Nähe von x_0 wählen!

Ableitungskriterium für Extrema

Eine Lösung $x = x_0$ liefert zusammen mit dem zugehörigen Funktionswert ein Extremum $\big(x_0/f(x_0)\big)$, wenn die Krümmung des Graphen sich an der Stelle nicht ändert, d. h. $f''(x_0) \neq 0$. Genauer:

[1] Da man sich hier nur für die nähere Umgebung des Punktes interessiert, spricht man auch genauer von einem **lokalen Extremum**.

- Ist $f'(x_0) = 0$, dann ist $\big(x_0)/f(x_0)\big)$ ein Maximum, wenn die Funktion links und rechts von x_0 rechtsgekrümmt ist. Es gilt:

$$\boxed{\begin{gathered}\big(x_0)/f(x_0)\big) \text{ ist Maximum, wenn} \\ f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x) < 0.\end{gathered}}$$

- Ist $f'(x_0) = 0$, dann ist $\big(x_0)/f(x_0)\big)$ ein Minimum, wenn die Funktion links und rechts von x_0 linksgekrümmt ist. Es gilt:

$$\boxed{\begin{gathered}\big(x_0)/f(x_0)\big) \text{ ist Minimum, wenn} \\ f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x) > 0.\end{gathered}}$$

5 Wendepunkte

Als **Wendepunkte** bezeichnet man die Punkte des Graphen der Funktion $f(x)$, in denen er die Krümmungsrichtung wechselt, d. h. in denen er von rechtsgekrümmt zu linksgekrümmt wechselt oder umgekehrt.

In den Punkte, wo der Graph die Richtung wechselt, hat die Steigung ein Maximum oder ein Minimum, d. h. an dem zugehörigen x-Wert, der so genannten **Wendestelle**, hat die Ableitungsfunktion $f'(x)$ ein Extremum.

Damit ist dort die Steigung der Ableitungsfunktion neutral, d. h. für die Ableitung der Ableitungsfunktion gilt an diesen Stellen $f''(x) = 0$. Wir erhalten die Wendestellen durch Lösen der Gleichung $f''(x) = 0$:

$$\boxed{\text{löse:} \quad f''(x) = 0}$$

Um nun zu entscheiden, ob tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt, muss man diese Lösungen genauer untersuchen. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

Vorzeichenwechselkriterium für Wendepunkte

Eine Lösung $x = x_0$ von $f''(x) = 0$ liefert zusammen mit dem zugehörigen Funktionswert einen Wendepunkt $\big(x_0/f(x_0)\big)$, wenn die Krümmung von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ die Richtung ändert, d. h. $f''(x)$ ändert an der Stelle x_0 sein Vorzeichen. Genauer:

- Ist $f''(x_0) = 0$, dann ist $\big(x_0)/f(x_0)\big)$ ein Wendepunkt, wenn die Funktion links von x_0 steigt und rechts von x_0 fällt, d. h.

$$\big((x_0)/f(x_0)\big) \text{ ist Wendepunkt, wenn}$$
$$f''(x_0) = 0 \text{ und } f''(x) > 0 \text{ für } x < x_0 \text{ und } f''(x) < 0 \text{ für } x > x_0$$
$$\text{oder}$$
$$f''(x_0) = 0 \text{ und } f''(x) < 0 \text{ für } x < x_0 \text{ und } f''(x) > 0 \text{ für } x > x_0$$

Hier muss man der praktischen Anwendung das x immer rechts und links in der Nähe von x_0 wählen!

Ableitungskriterium für Wendepunkte

Eine Lösung $x = x_0$ von $f''(x) = 0$ liefert zusammen mit dem zugehörigen Funktionswert einen Wendepunkt $\big(x_0/f(x_0)\big)$, wenn die Ableitungsfunktion an der Stelle ein Extremum hat. Es gilt:

$$\big((x_0)/f(x_0)\big) \text{ ist Wendepunkt, wenn}$$
$$f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0.$$

Bemerkung 1.

1. Wendepunkte mit neutraler Steigung heißen **Sattelpunkte**.
2. Alle Punkte mit neutraler Steigung, die keine Extrema sind, sind Sattelpunkte.
3. Die Vorzeichenwechselkriterien sind scharfe Kriterien, d. h. sie liefern immer eine Entscheidung.
4. Die Kriterien mit Hilfe der höheren Ableitungen liefern keine Entscheidung, wenn sie Null sind, also $f''(x_0) = 0$ im Fall eines möglichen Extremums und $f'''(x_0) = 0$ im Fall eines möglichen Wendepunkts.

   In diesen Fällen kann man auf das VZWK zurückgreifen.