Frank Klinker

Lineare Gleichungssysteme

Teil 1: Grundbegriffe und die Dreiecksform

1 Vorbemerkung

Wir haben lineare Gleichungssysteme bereits kennengelernt, nämlich bei der Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden.

Dort waren zwei Geradengleichungen gegeben, etwa $y = 2x + 3$ und $y = 4x - 3$, und wir haben einen Punkt $S(x_S/y_S$ gesucht, der auf beiden Geraden liegt. Das heißt, wenn wir den Punkt in beide Geradengleichungen einsetzen, dann sind beide Gleichungen korrekt.

Dazu sind wir wie folgt vorgegangen:

- Zunächst haben wir die Geradengleichungen beider Geraden aufgestellt.
- Diese Geradengleichungen haben wir anschließend **gleichgesetzt**.
- Dann haben wir die entstandene lineare Gleichung für die Variable x gelöst und
- dann das gewonnene Ergebnis in eine der Geradengleichungen eingesetzt, um y zu erhalten.

Beispiel 1. $y = 2x + 3$ und $y = 4x - 13$ liefern gleichgesetzt

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 4x - 13 && \big| -2x \big| + 13 \\ 2x + 3 - 2x + 13 &= 4x - 13 - 2x + 13 \\ 16 &= 2x && \big| : 2 \\ 16 : 2 &= 2x : 2 \\ 8 &= x \end{aligned}$$

Dieses $x = 8$ setzen wir in $y = 2x + 3$ und erhalten

$$y = 2 \cdot 8 + 3 = 19\,.$$

Damit ist $S(8/19)$ der Schnittpunkt der Geraden.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 15. Dezember 2023

2 Die allgemeine Form linearer Gleichungssysteme

2.1 Das lineare Gleichungssystem

Ein **lineares Gleichungssystem (LGS)** besteht aus mehreren linearen Gleichungen. Diese können selbst mehr als eine Variable enthalten.

Wir präzisieren das an einigen Beispielen.

Wir werden uns zunächst auf LGS der folgenden Form beschränken:

a) $$\begin{cases} y - 2x = 3 \\ y - 4x = -13 \end{cases}$$ 2 Variablen, 2 Gleichungen (2×2-LGS)[1]

b) $$\begin{cases} y - x + 4z = 0 \\ y + 2x - z = -1 \\ y + z = 5 \end{cases}$$ 3 Variablen, 3 Gleichungen (3×3-LGS)

In fernerer Zukunft werden uns bei geometrischen Problemen auch LGS der folgenden Form interessieren:

c) $$\begin{cases} s - 2t = 2 \\ 2s - 2t = 4 \\ \frac{1}{2}s - 2t = 1 \end{cases}$$ 2 Variablen, 3 Gleichungen (2×3-LGS)

d) $$\begin{cases} s + t - 2u + v = 2 \\ - 3t + u + 4v = 7 \\ s - 3t - 3v = -4 \end{cases}$$ 4 Variablen, 3 Gleichungen (4×3-LGS)

Bemerkung 2. Wenn wir uns das Beispiel a) in der Liste ansehen, so entsprechen die beiden Gleichungen den (umgestellten) Normalformen des Beispiels 1 aus der Vorbemerkung.

2.2 Lösungen eines LGS

Eine **Lösung eines LGS** ist eine Sammlung von Werten für die vorkommenden Variablen, die jede einzelne der gegebenen Gleichungen gleichzeitig löst.

[1] Wir lesen dass als "2-Kreuz-2-System".

Beispiel 3. zu a) $x = 8, y = 19$ löst das LGS

$$\begin{cases} y - 2x = 3 \\ y - 4x = -13 \end{cases}$$

wie man durch Einsetzen sieht und wie wir in Beispiel 1 bereits berechnet haben.

zu c) $t = 0, s = 2$ löst das LGS

$$\begin{cases} s - 2t = 2 \\ 2s - 2t = 4 \\ \frac{1}{2}s - 2t = 1 \end{cases}$$

wie man durch Einsetzen sieht.

Bemerkung 4. 1. Die LGS a) und b) aus dem vorigen Abschnitt besitzen genauso viele Gleichungen wie Variablen.
Das führt dazu, dass es in der Regel stets eine eindeutige Lösung gibt.
Nur in speziellen Ausnahmefällen gibt es in diesem Fall keine oder mehr als eine Lösung.

2. Stimmen Anzahl der Gleichungen und Anzahl der Variablen in einem LGS nicht überein, wie in c) und d), so ist die Lage komplizierter.
Diese Diskussion verschieben wir auf einen späteren Zeitpunkt.

Da man einem LGS in der Regel seine Lösungen nicht ansieht, müssen wir ein Verfahren finden, dass es uns erlaubt

- das LGS zu manipulieren ohne seine Lösungen zu ändern
- das LGS in eine Form zu bringen, aus der man die Lösung "ablesen" kann.

3 Die Lösung eines linearen Gleichungssystems in Dreiecksform

Aber wie sieht ein LGS aus, aus dem man die Lösung ablesen kann?

Dazu betrachten wir die folgenden zwei speziellen LGS:

1.

$$\begin{array}{lrl} I & -2x + \ y &= 0 \\ II & 2y &= -4 \end{array}$$

Das besondere im LGS 1) ist:

- es gibt eine Gleichung (II), in der nur eine Variable vorkommt (hier y)
- es gibt eine weitere Gleichung (I), in der alle zwei Variablen vorkommen (y, x)

2.

$$\begin{array}{lrcrcrcl} I & -2x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ II & -x & & & + & 2z & = & 5 \\ III & x & & & & & = & -1 \end{array}$$

Das besondere im LGS 2) ist:

- es gibt eine Gleichung (III), in der nur eine Variable vorkommt (hier x)
- es gibt eine zweite Gleichung (II), in der nur die erste Variable und eine weitere Variable vorkommt (hier x, z)
- es gibt eine letzte Gleichung (I), in der alle drei Variablen vorkommen (x, z, y)

> Wenn diese spezielle Situation vorliegt, sagen wir auch:
>
> Das **LGS ist in Dreiecksform**.
>
> Diese Dreiecksform ist so speziell, weil wir hier die Lösungen "direkt ablesen" können.

In diesem Fall können wir die Lösung sehr einfach bestimmen:

1. In LGS 1) erhalten wir die Lösung wie folgt:
   - Aus Gleichung II erhalten wir $y = -2$, nachdem wir beide Seiten durch 2 dividieren.
   - Setzen wir $y = -2$ in Gleichung I ein, so gibt das $-2x + (-2) = 0$ oder $-2x = 2$ und schließlich $x = -1$
   - Die Probe durch Einsetzen zeigt, dass $x = -1, y = -2$ die Lösung des LGS 1) ist.
2. In LGS 2) erhalten wir die Lösung wie folgt:
   - Aus Gleichung III erhalten wir $x = -1$
   - Setzen wir $x = -1$ in Gleichung II ein, so gibt das $-(-1) + 2z = 5$ oder $2z = 4$ und schließlich $z = 2$
   - Setzen wir nun $x = -1, z = 2$ in Gleichung I ein, so erhalten wir $y - 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 0$ oder $y + 10 = 0$ und schließlich $y = -10$
   - Die Probe durch Einsetzen zeigt, dass $x = -1, y = -10, z = 2$ die Lösung des LGS 2) ist.

Das "Auflösen" einer Dreiecksform bis zur Lösung nennt man auch **rückwärts Einsetzen**.