Frank Klinker

Lineare Gleichungssysteme

Teil 2: Die Umformung eines LGS auf Dreiecksform

1 Erlaubte Umformungen eines LGS

Das Ziel der Umformungen eine LGS ist, es auf Dreiecksform zu bringen. Wie wir bereits wissen, können wir die Lösung dann "ablesen".

Wir überlegen uns zunächst, welche Manipulationen wir an einem LGS durchführen dürfen, ohne die Lösungsmenge zu ändern. Wir werden sehen, dass im Wesentlichen zwei Umformungen ausreichen:

U1: Multiplizieren oder Dividieren einer Gleichung mit einer Zahl (die nicht Null sein darf)

U2: Addition oder Subtraktion einer Gleichung zu oder von einer anderen

Die Manipulation eines LGS mit Hilfe der Umformungen U1 und U2 heißt auch **Additionsverfahren** oder **Gauß-Verfahren** oder **Gaußsches Eliminationsverfahren**.

1.1 U1: Multiplizieren oder Dividieren einer Gleichung mit einer Zahl

Wir wissen, dass wir eine Gleichung auf beiden Seiten mit einer Zahl multiplizieren oder dividieren dürfen, ohne ihre Lösung zu ändern.

Das bleibt auch gültig, wenn wir das mit einer oder mehreren Gleichungen in einem LGS tun, z. B.

Nr.	LGS	Veränderung
I	$y-2x=3$	
II	$y-4x=-13$	
I	$3y-6x=9$	$I\cdot 3$
II	$-2y+8x=26$	$II\cdot(-2)$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 26. Januar 2024

oder

Nr.	LGS	Veränderung
I	$y - \quad 2x = 3$	
II	$y - \quad 4x = -13$	
I	$6y - 12x = 18$	$I \cdot 6$
II	$3y - 12x = -39$	$II \cdot 3$

1.2 U2: Addieren oder Subtrahieren von Gleichungen

Wir wissen, dass wir bei einer Gleichung auf beiden Seiten das Gleiche addieren oder subtrahieren dürfen. Dabei ändert sich die Lösung nicht.

Das bleibt bei den Gleichungen eines LGS ebenfalls gültig und liefert die Möglichkeit Gleichungen miteinander zu addieren oder zu subtrahieren:

Nr.	LGS	Veränderung
I	$y - 2x = 3$	
II	$y - 4x = -13$	
I	$y - 2x = 3$	unverändert übernommen
II	$y - 4x - \boxed{(y - 2x)} = -13 - \boxed{3}$	$II - \boxed{I}$

Wir haben hier auf beiden Seiten der Gleichung II etwas abgezogen. Wegen Gleichung I wissen wir, dass wir auf beiden Seiten das Gleiche abgezogen haben. Somit ändern wir die Lösung dadurch nicht.

Wenn wir nun die neue Gleichung zusammenfassen erhalten wir

Nr.	LGS	Veränderung
I	$y - 2x = 3$	
II	$y - 4x = -13$	
I	$y - 2x = 3$	unverändert übern.
II	$y - 4x - \boxed{(y - 2x)} = -13 - \boxed{3}$	$II - \boxed{I}$
I	$y - 2x = 3$	unverändert übern.
II	$-2x = -16$	Termumformungen

Bemerkung 1. In unsrer Schreibweise achten wir immer darauf, dass wir nach jedem Schritt die gleiche Anzahl an Gleichungen behalten. Die Idee dabei ist:

- Wir sehen in jedem Schritt, um was für eine Art von System es sich handelt
- Wir sehen in jedem Schritt direk, mit welchen Gleichungen wir gerade arbeiten

- Fehler lassen sich später einfacher zurückverfolgen

Die Effizienz dieser Schreibweise wird bei größeren Systemen besonders deutlich!

2 Die Umformung eines 2×2-LGS bis zur Dreiecksform

Wir sehen uns das letzte Beispiel genauer an:

Nr.	LGS	Veränderung
I	$y - 2x = 3$	
II	$y - 4x = -13$	
I	$y - 2x = 3$	übernommen
II	$-2x = -16$	$II - I$

Hier haben wir bereits unser Ziel erreicht, denn das LGS ist in Dreiecksform.[1] Wir können also die Lösung "ablesen":

- Aus II: $-2x = -16$ also $x = 8$
- $x = 8$ in I einsetzen: $y - 2 \cdot 8 = 3$ also $y - 16 = 3$ und schließlich $y = 19$
- Die Lösung des LGS ist $\mathbb{L} = \{(8/19)\}$

Wir wiederholen das an zwei weiteren Beispielen, wo wir beide Umformungen U1 und U2 verwenden müssen:

Beispiel 2.

$$\begin{aligned} -6x - \ \ 3y &= 6 \\ 4x - 12y &= 10 \end{aligned}$$

Wir lösen das LGS in der folgenden Reihenfolge[2]:

- "Vernichte" x aus einer der Gleichungen
- Dann gibt es in II nur noch y und in I sind noch x und y vorhanden
- Wir setzen der Reihe nach die gelösten Variablen rückwärts ein

[1] Wir sagen auch: "wir haben die Variable y aus einer Gleichung vernichtet bzw. eliminiert" (das begründet auch den Namen des Verfahrens).

[2] Genau genommen können wir diese Liste erst im Anschluss an die Lösungsfindung formulieren, weil wir das genaue Vorgehen in der Regel zu Anfang noch nicht sehen! Außerdem ist die Reihenfolge des Vorgehens nicht eindeutig.

Nr.	LGS	Veränderung
I	$-6x - 3y = 6$	
II	$4x - 12y = 10$	
I	$-2x - y = 2$	$I : 3$
II	$2x - 6y = 5$	$II : 2$
I	$-2x - y = 2$	übernommen
II	$- 7y = 7$	$I + II$
I	$-2x - y = 2$	übernommen
II	$y = -1$	$I : (-7)$

Wir sind jetzt in Dreiecksfrom und rückwärts Einsetzen gibt:

- Aus II: $y = -1$
- $y = -1$ in I einsetzen: $-2x - (-1) = 2$ also $-2x + 1 = 2$ und schließlich $x = -\frac{1}{2}$
- Die Lösung des LGS ist $\mathbb{L} = \left\{\left(-\frac{1}{2}/-1\right)\right\}$

Beispiel 3.

$$-5x - 3y = 4$$
$$3x - 2y = -10$$

Wir lösen das LGS in der folgenden Reihenfolge:

- "Vernichte" y aus einer Gleichung
- Dann gibt es in II nur noch x und in I sind noch x und y vorhanden
- Wir setzen der Reihe nach die gelösten Variablen rückwärts ein

Nr.	LGS	Veränderung
I	$-5x - 3y = 4$	
II	$3x - 2y = -10$	
I	$-10x - 6y = 8$	$I \cdot 2$
II	$9x - 6y = -30$	$II \cdot 3$
I	$-10x - 6y = 8$	übernommen
II	$19x = -38$	$II - I$
I	$-10x - 6y = 8$	übernommen
II	$x = -2$	$II : 19$

Wir sind jetzt in Dreiecksform und rückwärts Einsetzen gibt:

- Aus II: $x = -2$
- $x = -2$ in I einsetzen: $-10 \cdot (-2) - 6y = 8$ also $20 - 6y = 8$ und schließlich $y = 2$
- Die Lösung des LGS ist $\mathbb{L} = \{(-2/1)\}$

3 Das Vorgehen bei größeren LGS

Wir beschränken uns hier auf die Größe 3×3 an der hoffentlich das allgemeine Vorgehen deutlich wird.

- "Vernichte" zunächst eine der Variablen aus zwei der Gleichungen mit Hilfe von U1 und U2

  Dann hat man noch eine Gleichung mit allen Variablen (I) und zwei mit nur noch zwei Variablen (II, III)

- Behandle jetzt Gleichung II und III wie ein 2×2-LGS und bringe dieses auf Dreiecksform (dabei schleppt man Gleichung I einfach in jedem Schritt mit.

- Das Ergebnis ist eine Dreiecksform für das gesamte 3×3-LGS.

- Aus diesem wird zum Schluss die Lösung durch rückwärts Einsetzen "abgelesen".

Hier ist vor allem der erste Schritt neu und wir führen das an einigen Beispielen durch:

Beispiel 4.

$$\begin{aligned} 14x - 6y - 22z &= 76 \\ 18x + 4y - 120z &= 8 \\ 2x - 2y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

Wir lösen das LGS in der folgenden Reihenfolge:

- "Vernichte" y aus zwei Gleichungen (hier II und III)
- Behalte die volle Gleichung (hier I) und aus den verbleibenden zwei Gleichungen "vernichte" x aus einer Gleichung (hier III)
- Dann gibt es in einer Gleichung nur noch z (hier III), in einer nur noch x und z (hier II) und in einer sind noch x, y und z enthalten (hier I)
- Wir setzen der Reihe nach die gelösten Variablen ein

Wir gehen sehr kleinschrittig vor:

Nr.	LGS	Veränderung
I	$14x - 6y - 22z = 76$	
II	$18x + 4y - 120z = 8$	
III	$2x - 2y - 2z = 4$	
I	$14x - 6y - 22z = 76$	I übernommen
II	$9x + 2y - 60z = 4$	$II : 2$
III	$2x - 2y - 2z = 4$	III übernommen
I	$14x - 6y - 22z = 76$	I übernommen
II	$27x + 6y - 180z = 12$	$II \cdot 3$
III	$6x - 6y - 6z = 12$	$III \cdot 3$
I	$x - y - z = 2$	$III : 6$
II	$8x - 16z = 64$	$I - III$
III	$33x - 186z = 24$	$II + III$
I	$x - y - z = 2$	I übernommen
II	$x - 2z = 8$	$II : 8$
III	$11x - 62z = 8$	$III : 3$
I	$x - y - z = 2$	I übernommen
II	$11x - 22z = 88$	$II \cdot 11$
III	$11x - 62z = 8$	III übernommen
I	$x - y - z = 2$	I übernommen
II	$11x - 22z = 88$	II übernommen
III	$40z = 80$	$II - III$

Wir sind nun in Dreiecksform und können rückwärts Einsetzen:

- Aus III: $40z = 80$, also $z = 2$
- $z = 2$ in II einsetzen: $11x - 22 \cdot 2 = 88$, also $11x - 44 = 88$ und schließlich $x = 12$
- $x = 12, z = 2$ in I einsetzen: $12 - y - 2 = 2$, also $y = 8$
- Die Lösung des LGS ist $\mathbb{L} = \{(12/8/21)\}$

Beispiel 5.

$$2x + 3y + 4z = 49$$
$$3x + 4y + 5z = 64$$
$$x + 5y + 6z = 79$$

Wir lösen das LGS in der folgenden Reihenfolge:

- "Vernichte" x aus I und II
- Behalte III als neue I und aus den verbleibenden zwei Gleichungen "vernichte" y aus III
- Dann gibt es in III nur noch z, in II nur noch y und z und in I sind noch x, y und z enthalten
- Wir setzen der Reihe nach die gelösten Variablen ein

Dieses Mal gehen wir etwas "schreibfauler" vor, indem wir nach dem Malnehmen direkt die Addition bzw. Subtraktion durchführen:

Nr.	LGS	Veränderung
I	$2x + 3y + 4z = 49$	
II	$3x + 4y + 5z = 64$	
III	$x + 5y + 6z = 79$	
I	$x + 5y + 6z = 79$	III übernommen
II	$-7y - 8z = -109$	$I - 2 \cdot III$
III	$-11y - 13z = -173$	$II - 3 \cdot III$
I	$x + 5y + 6z = 79$	I übernommen
II	$-7y - 8z = -109$	II übernommen
III	$3z = 12$	$11 \cdot II - 7 \cdot III$

Wir sind nun in Dreiecksform und können rückwärts Einsetzen:

- Aus III: $3z = 12$, also $z = 4$
- $z = 4$ in II einsetzen: $-7y - 8 \cdot 4 = -109$, also $-7y = -77$ und schließlich $y = 11$
- $y = 11, z = 4$ in I einsetzen: $x + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 4 = 79$, also $x + 79 = 79$ und damit $x = 0$
- Die Lösung des LGS ist $\mathbb{L} = \{(0/11/4)\}$

4 Warum es für 2×2-LGS keine weiteren Verfahren gibt!

Oft wird das Additionsverfahren für 2×2-LGS als eines von drei Verfahren angepriesen: hinzu kommen manchmal als eigenständige Verfahren das Gleichsetzungsverfahren und das Einsetzungsverfahren.

Als Gleichsetzungsverfahren bezeichnet man die Lösungsidee, wie wir sie bei der Berechnung von Schnittpunkten zweier Geraden kennengelernt haben.

Mit dem Einsetzungsverfahren meint man das Auflösen der einen Gleichung nach einer Variablen und das anschließende Einsetzen dieses Ausdrucks in die zweite Gleichung.

Beides sind allerdings lediglich Spezialfälle des Additionsverfahrens, wie wir in den zwei nächsten Vergleichen sehen (dabei rechnen wir jeweils bis zu der Stelle, ab der es in beiden Fällen gleich weitergeht).

Vergleich 1. Einsetzungsverfahren vs. Additionsverfahren

Einsetzungsverfahren

$$\begin{array}{ll} I & a_1x + b_1y = c_1 \\ II & a_2x + b_2y = c_2 \\ \hline \end{array}$$

II nach x auflösen:

$$x = \tfrac{c_2}{a_2} - \tfrac{b_2}{a_2}y$$

und in I einsetzen:

$$a_1\left(\tfrac{c_2}{a_2} - \tfrac{b_2}{a_2}y\right) + b_1y = c_1 \;\Big|\; - \tfrac{a_1c_2}{a_2}$$

$$\left(b_1 - \tfrac{a_1b_2}{a_2}\right)y = c_1 - \tfrac{a_1c_2}{a_2}$$

Additionsverfahren

$$\begin{array}{llrll} I & a_1x + & b_1y & = c_1 & \\ II & a_2x + & b_2y & = c_2 & \\ \hline I & a_1x + & b_1y & = c_1 & \\ II & a_1x + & \tfrac{a_1b_2}{a_2}y & = \tfrac{a_1c_2}{a_2} & (\tfrac{a_1}{a_2} \cdot II) \\ \hline I & a_1x + & b_1y & = c_1 & \\ II & \multicolumn{2}{l}{\left(b_1 - \tfrac{a_1b_2}{a_2}\right)y} & = c_1 - \tfrac{a_1c_2}{a_2} & (I - II) \\ \hline \end{array}$$

Vergleich 2. Gleichsetzungsverfahren vs. Additionsverfahren

Gleichsetzungsverfahren

$$\begin{array}{ll} I & a_1x + b_1y = c_1 \\ II & a_2x + b_2y = c_2 \\ \hline \end{array}$$

I nach x auflösen:

$$x = \tfrac{c_1}{a_1} - \tfrac{b_1}{a_1}y,$$

II nach x auflösen:

$$x = \tfrac{c_2}{a_2} - \tfrac{b_2}{a_2}y$$

und gleichsetzen:

$$\tfrac{c_1}{a_1} - \tfrac{b_1}{a_1}y = \tfrac{c_2}{a_2} - \tfrac{b_2}{a_2}y \;\Big|\; - \tfrac{c_1}{a_1} + \tfrac{b_2}{a_2}y$$

$$\left(\tfrac{b_2}{a_2} - \tfrac{b_1}{a_1}\right)y = \tfrac{c_2}{a_2} - \tfrac{c_1}{a_1}$$

Additionsverfahren

$$\begin{array}{llrll} I & a_1x + & b_1y & = c_1 & \\ II & a_2x + & b_2y & = c_2 & \\ \hline I & x + & \tfrac{b_1}{a_1}y & = \tfrac{c_1}{a_1} & (II : a_1) \\ II & x + & \tfrac{b_2}{a_2}y & = \tfrac{c_2}{a_2} & (II : a_2) \\ \hline I & a_1x + & b_1y & = c_1 & \\ II & \multicolumn{2}{l}{\left(\tfrac{b_2}{a_2} - \tfrac{b_1}{a_1}\right)y} & = \tfrac{c_2}{a_2} - \tfrac{c_1}{a_1} & (II - I) \\ \hline \end{array}$$

Auch wenn sie nichts Neues liefern, haben die zwei 'Extra-Rechenarten' dennoch ihre Daseinsberechtigung: z. B. dann, wenn eine oder beide Gleichungen bereits nach einer Variablen 'aufgelöst' sind!