Frank Klinker

Lineare Gleichungssysteme

Teil 3: Die Lösungsstruktur

1 Wiederholung: Die Lösungsstruktur linearer Gleichungen

Bisher haben unsere linearen Gleichungssysteme in den Beispielen genau eine Lösung gehabt.

Dass das nicht immer so sein muss, wissen wir eigentlich schon für 2×2-Systeme.

Dazu erinnern wir uns, dass wir für diese eine geometrische Interpretation hatten, nämlich die Schnittmenge zweier Geraden: Diese kann bekanntlich genau einen Punkt oder eine Gerade enthalten oder sie kann leer sein.

Das Phänomen, dass es nicht immer genau eine Lösung gibt, haben wir bereits bei den linearen Gleichungen gesehen.

Um die Lösungen einer linearen Gleichungen zu untersuchen, haben wir diese zunächst "aufgeräumt" und auf die Form

$$Ax = B$$

gebracht, wobei A und B Zahlen waren.[1]

So konnten wir die Anzahl der Lösungen und sogar die Lösung selbst direkt ablesen:

Lösungsstruktur linearer Gleichungen

Fall 1	**Fall 2**	**Fall 3**
$A \neq 0$	$A = 0, B \neq 0$	$A = 0, B = 0$
genau eine Lösung	keine Lösung	unendlich viele Lösungen
Beispiel:	Beispiel:	(Einziges) Beispiel:
$2x = 7$ einzige Lösung: 3,5	$0 = 12$ keine Lösung	$0 = 0$ unendlich viele Lösungen (nämlich alle Werte für x)

Auch bei den 2×2-Systemen und den 3×3-Systemen gibt es so eine Beschreibung der Anzahl der Lösungen und man kann diese direkt von der Dreiecksform ablesen.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 30. August 2023

[1] Wenn wir die lineare Gleichung als 1×1-System betrachten, dann ist diese Form gerade die Dreiecksform.

Für die 2×2-Systeme erhalten wir sogar wieder die Beschreibung der Lösungen selbst. Dazu nutzen wir die geometrische Interpretation mit Hilfe von Geraden.

Bei den 3×3-Systemen fällt diese Beschreibung im Fall mehrerer Lösungen schwerer. Zwar gibt es auch hier eine geometrische Interpretation, aber diese ist nicht so einfach wie im Fall 2×2 und wir verschieben sie auf später.

2 Die Lösungsstruktur von 2×2-LGS

Wir geben die Ergebnisse direkt mit Hilfe von Beispielen an. Eine allgemeiner Formulierung wäre hier nicht aussagekräftiger.

Lösungsstruktur von 2×2-LGS

Fall 1

I	$2x - 5y = 3$	
II	$3x + 6x = -5$	
I	$2x - 5y = 3$	(I)
II	$3y = -19$	$(2 \cdot II - 3 \cdot I)$

"normale" Dreiecksform

genau eine Lösung
(durch *rückwärts Einsetzen*)

Fall 2

I	$x - 3y = -1$	
II	$2x - 6x = -3$	
I	$x - 3y = -1$	(I)
II	$0 = -1$	$(II - 2 \cdot I)$

"spezielle" Dreiecksform

keine Lösung
(die letzte Gleichung ist nicht lösbar)

Fall 3

I	$3x + y = -2$	
II	$-9x - 3y = 6$	
I	$3x + y = 3$	(I)
II	$0 = 0$	$(II + 3 \cdot I)$

"spezielle" Dreiecksform

unendlich viele Lösungen

Zusammenfassung: An der letzten Zeile der Dreiecksform lässt sich die Art der Lösungsmenge ablesen!

3 Die Lösungsstruktur von 3×3-LGS

Auch hier geben wir die Ergebnisse direkt mit Hilfe von Beispielen an. Ebenso wie bei dem kleineren System ist auch hier eine allgemeinere Formulierung nicht aussagekräftiger.

Lösungsstruktur von 3×3-LGS

Fall 1

I	$-3x - 8y - 3z = -3$	
II	$2x + 3y - 2z = 6$	
III	$x + 3y + 2z = 0$	
I	$-3x - 8y - 3z = -3$	(I)
II	$-3y - 6z = 6$	$(II-2\cdot III)$
III	$y + 3z = -3$	$(I+3\cdot III)$
I	$-3x - 8y - 3z = -3$	(I)
II	$-3y - 6z = 6$	(II)
III	$3z = -3$	$(II+3\cdot III)$

"normale" Dreiecksform

genau eine Lösung
(durch *rückwärts Einsetzen*)

Fall 2a

I	$-3x - 2y - 3z = -3$	
II	$2x + 3y - 2z = 4$	
III	$-x + y - 5z = 3$	
I	$-3x - 2y - 3z = -3$	(I)
II	$-5y + 12z = -12$	$(I-3\cdot III)$
III	$5y - 12z = 10$	$(II+2\cdot III)$
I	$-3x - 8y - 3z = -3$	(I)
II	$-5y + 12z = -12$	(II)
III	$0 = 2$	$(II+III)$

Fall 2b

I	$-3x - 2y - 3z = -3$	
II	$6x + 4y + 6z = 6$	
III	$3x + 2y + 3z = 2$	
I	$-3x - 8y - 3z = -3$	(I)
II	$0 = 0$	$(II+2\cdot I)$
III	$0 = -1$	$(III+I)$

"spezielle" Dreiecksform

keine Lösung
(die letzte Gleichung ist nicht lösbar)

Fall 3a

I	$-3x-2y-3z=-3$	
II	$2x+3y-2z=6$	
III	$-x+y-5z=3$	
I	$-3x-2y-3z=-3$	(I)
II	$-5y+12z=-12$	$(I-3\cdot III)$
III	$5y-12z=12$	$(II+2\cdot III)$
I	$-3x-8y-3z=-3$	(I)
II	$-5y+12z=-12$	(II)
III	$0=0$	$(II+III)$

Fall 3b

I	$-3x-2y-3z=-3$	
II	$6x+4y+6z=6$	
III	$3x+2y+3z=3$	
I	$-3x-8y-3z=-3$	(I)
II	$0=0$	$(II+2\cdot I)$
III	$0=0$	$(III+I)$

"spezielle" Dreiecksform

unendlich viele Lösungen

Zusammenfassung: An den letzten zwei Zeilen der Dreiecksform lässt sich die Art der Lösungsmenge ablesen!