Frank Klinker

Grundlagen und Beispiele: Lineare Gleichungssysteme

1 Vorbemerkung

Wir haben lineare Gleichungssysteme bereits kennengelernt.

Als wir den Schnittpunkt zweier Geraden berechnet haben, sind wir wie folgt vorgegangen:

- Zunächst haben wir beide Geraden in Normalform dargestellt.
- Wir haben die Geradengleichungen anschließend **gleichgesetzt**.
- Dann haben wir die entstandene lineare Gleichung für die Variable x gelöst und
- dann das gewonnene Ergebnis in eine der Normalformen eingesetzt, um y zu erhalten.

Beispiel 1. $y = 2x + 3$ und $y = 4x - 13$ liefern gleichgesetzt

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 4x - 13 && \big| -2x \big| + 13 \\ 2x + 3 - 2x + 13 &= 4x - 13 - 2x + 13 \\ 16 &= 2x && \big| : 2 \\ 16 : 2 &= 2x : 2 \\ 8 &= x \end{aligned}$$

Dieses $x = 8$ setzen wir in $y = 2x + 3$ und erhalten

$$y = 2 \cdot 8 + 3 = 19\,,$$

sodass der Schnittpunkt der Geraden $S(8/19)$ ist.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

2 Definition: Lineare Gleichungssysteme

Ein **lineares Gleichungssystem (LGS)** besteht aus mehreren linearen Gleichungen. Diese können selbst mehr als eine Variable enthalten.

Wir präzisieren das an einigen Beispielen.

Wir werden uns zunächst auf LGS der folgenden Form beschränken:[1]

$$\text{a)} \quad \begin{cases} y - 2x = 3 \\ y - 4x = -13 \end{cases} \qquad \text{2 Gleichungen, 2 Variablen}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} y - x + 4z = 0 \\ y + 2x - z = -1 \\ y \phantom{{}+2x} + z = 5 \end{cases} \qquad \text{3 Gleichungen, 3 Variablen}$$

In fernerer Zukunft werden uns bei geometrischen Problemen auch LGS der folgenden Form interessieren:

$$\text{c)} \quad \begin{cases} s - 2t = 2 \\ 2s - 2x = 4 \\ \frac{1}{2}s - 2t = 1 \end{cases} \qquad \text{3 Gleichungen, 2 Variablen}$$

$$\text{d)} \quad \begin{cases} s + t - 2u + v = 2 \\ - 3t + u + 4v = 7 \\ s - 3t \phantom{{}-2u} - 3v = -4 \end{cases} \qquad \text{3 Gleichungen, 4 Variablen}$$

Bemerkung 2. Wenn wir uns das Beispiel a) in der Liste ansehen, so entsprechen die beiden Gleichungen den (umgestellten) Normalformen des Beispiels 1 aus der Vorbemerkung.

3 Die Lösung eines linearen Gleichungssystems und die Dreiecksform

3.1 Die Lösung

Eine **Lösung eines LGS** ist eine Sammlung von Werten für die vorkommenden Variablen, die jede einzelne der gegebenen Gleichungen gleichzeitig löst.

Beispiel 3. zu a) $x = 8, y = 19$ löst das LGS

$$\begin{cases} y - 2x = 3 \\ y - 4x = -13 \end{cases}$$

wie man durch Einsetzen sieht.

zu c) $t = 0, s = 2$ löst das LGS

$$\begin{cases} s - 2t = 2 \\ 2s - 2t = 4 \\ \frac{1}{2}s - 2t = 1 \end{cases}$$

wie man durch Einsetzen sieht.

Bemerkung 4. 1. Die LGS a) und b) aus dem vorigen Abschnitt besitzen genauso viele Gleichungen, wie Variablen.
Das führt dazu, dass es in der Regel stets eine eindeutige Lösung gibt.
Nur in speziellen Ausnahmefällen gibt es in diesem Fall keine oder mehr als eine Lösung.

2. Stimmen Anzahl der Gleichungen und Anzahl der Variablen in einem LGS nicht überein, wie in c) und d), so ist die Lage komplizierter.
Diese Diskussion verschieben wir auf einen späteren Zeitpunkt.

Da man einem LGS in der Regel seine Lösungen nicht ansieht, müssen wir ein Verfahren finden, dass es uns erlaubt

- das LGS zu manipulieren ohne seine Lösungen zu ändern
- das LGS in eine Form zu bringen, aus der man die Lösung "ablesen" kann.

3.2 Die Dreiecksform

Aber wie sieht ein LGS aus, aus dem man die Lösung ablesen kann?

Dazu betrachten wir die folgenden zwei speziellen LGS:

1)
$$\begin{array}{lrl} I & -2x + y &= 0 \\ II & 2y &= -4 \end{array}$$

Das besondere im LGS 1) ist:

- es gibt eine Gleichung (II), in der nur eine Variable vorkommt (y),
- es gibt eine weitere Gleichung (I), in der alle zwei Variablen vorkommen (y, x).

2)
$$\begin{array}{lrl} I & y - 2x + 4z &= 0 \\ II & x &= -1 \\ III & -\ x + 2z &= 5 \end{array}$$

Das besondere im LGS 2) ist:

- es gibt eine Gleichung (II), in der nur eine Variable vorkommt (x),
- es gibt eine zweite Gleichung (III), in der nur die erste Variable und eine weitere Variable vorkommt (x, z),
- es gibt eine letzte Gleichung (I), in der alle drei Variablen vorkommen (x, z, y).

> Wenn diese spezielle Situation vorliegt, sagen wir auch:
>
> Das **LGS ist in Dreiecksform**.
>
> Diese Dreiecksform ist so speziell, weil wir hier die Lösungen direkt "ablesen" können.

In LGS 1) erhalten wir die Lösung wie folgt:

- Aus Gleichung II erhalten wir $y = -2$, nachdem wir beide Seiten durch 2 dividieren.
- Setzen wir $y = -2$ in Gleichung I ein, so gibt das $-2x + (-2) = 0$ oder $-2x = 2$ und schließlich $x = -1$
- Die Probe durch Einsetzen zeigt, dass $x = -1, y = -2$ die Lösung des LGS 1) ist.

In LGS 2) erhalten wir die Lösung wie folgt:

- Aus Gleichung II erhalten wir $x = -1$
- Setzen wir $x = -1$ in Gleichung III ein, so gibt das $-(-1) + 2z = 5$ oder $2z = 4$ und schließlich $z = 2$
- Setzen wir nun $x = -1, z = 2$ in Gleichung I ein, so erhalten wir $y - 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 0$ oder $y + 10 = 0$ und schließlich $y = -10$
- Die Probe durch Einsetzen zeigt, dass $x = -1, y = -10, z = 2$ die Lösung des LGS 2) ist.

4 Die Umformung eines LGS bis zur Dreiecksform

Das Ziel der Umformungen eine LGS wird es sein, dieses auf Dreiecksform zu bringen, um die Lösung "ablesen" zu können.

Wir überlegen uns zunächst, welche Manipulationen wir an einem LGS durchführen dürfen, ohne die Lösungsmenge zu ändern. Wir werden sehen, dass im Wesentlichen zwei Umformungen ausreichen:

U1: Multiplizieren oder Dividieren einer Gleichung mit einer Zahl (die nicht Null sein darf)

U2: Addition oder Subtraktion einer Gleichung zu oder von einer anderen

Die Manipulation eines LGS mit Hilfe der Umformungen U1 und U2 heißt auch **Additionsverfahren** oder **Gauß-Verfahren** oder **Gaußsches Eliminationsverfahren**.

4.1 U1: Multiplizieren oder Dividieren einer Gleichung mit einer Zahl

Wir wissen, dass wir eine Gleichung auf beiden Seiten mit einer Zahl multiplizieren oder dividieren dürfen, ohne ihre Lösung zu ändern.

Das bleibt auch gültig, wenn wir das mit einer oder mehreren Gleichungen in einem LGS tun, z. B.

Nr.	LGS	Veränderung
I	$y-2x=3$	
II	$y-4x=-13$	
I	$3y-6x=9$	$I\cdot 3$
II	$-2y+8x=26$	$II\cdot(-2)$

oder

Nr.	LGS	Veränderung
I	$y-\ \ 2x=3$	
II	$y-\ \ 4x=-13$	
I	$6y-12x=18$	$I\cdot 6$
II	$3y-12x=-39$	$II\cdot 3$

4.2 U2: Addieren oder Subtrahieren von Gleichungen

Wir wissen, dass wir bei einer Gleichung auf beiden Seiten das Gleiche addieren oder subtrahieren dürfen. Dabei ändert sich die Lösung nicht.

Das bleibt bei den Gleichungen eines LGS ebenfalls gültig und liefert die Möglichkeit Gleichungen miteinander zu addieren oder zu subtrahieren:

Nr.	LGS	Veränderung
I	$y - 2x = 3$	
II	$y - 4x = -13$	
I	$y - 2x = 3$	
II	$y - 4x - \boxed{(y - 2x)} = -13 - \boxed{3}$	$II - \boxed{I}$

Wir haben hier auf beiden Seiten der Gleichung II etwas abgezogen. Wegen Gleichung I wissen wir, dass wir auf beiden Seiten das Gleiche abgezogen haben. Somit ändern wir die Lösung dadurch nicht.

Wenn wir nun die neue Gleichung zusammenfassen erhalten wir

Nr.	LGS	Veränderung
I	$y - 2x = 3$	
II	$y - 4x = -13$	
I	$y - 2x = 3$	
II	$y - 4x - \boxed{(y - 2x)} = -13 - \boxed{3}$	$II - \boxed{I}$
I	$y - 2x = 3$	
II	$-2x = -16$	Termumformungen

Wir sehen, dass wir an dieser Stelle bereits Dreiecksform erreicht haben.[2] Wir können also bereits die Lösung "ablesen":

- Aus Gleichung II erhalten wir $-2x = -16$ oder $x = 8$
- Setzen wir $x = 8$ in Gleichung I ein, so gibt das $y - 2 \cdot 8 = 3$ oder $y - 16 = 3$ und schließlich $y = 19$
- Die Lösung des LGS ist $x = 8, y = 19$

Bemerkung 5. Wir sehen, dass wir hier durch das Additionsverfahren die Lösung erhalten haben, die wir schon in Beispiel 1 berechnet haben.

[2] Wir sagen auch: "Wwir haben die Variable y aus Gleichung II vernichtet bzw. eliminiert" (das begründet auch den Namen des Verfahrens).

5 Beispiele zum Additionsverfahren

Beispiel 6.

$$\begin{aligned} -6x - 3y &= 6 \\ 4x - 12y &= 10 \end{aligned}$$

Wir lösen das LGS in der folgenden Reihenfolge[3]:

1. "Vernichte" x aus I mit Hilfe von II
2. Dann gibt es in I nur noch y und in II sind noch x und y vorhanden
3. Wir setzen der Reihe nach die gelösten Variablen ein

Nr.	LGS	Veränderung
I	$-6x - 3y = 6$	
II	$4x - 12y = 10$	
I	$-2x - y = 2$	$I : 3$
II	$2x - 6y = 5$	$II : 2$
I	$- 7y = 7$	$I + II$
II	$2x - 6y = 5$	
I	$y = -1$	$I : (-7)$
II	$2x - 6y = 5$	

In Gleichung I haben wir nun direkt die Lösung für y. Jetzt folgt das "Einsetzen":

$$y = -1 \text{ in } II: \qquad 2x - 6 \cdot (-1) = 5, \text{ d.h. } x = -\tfrac{1}{2}$$

also

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(-\tfrac{1}{2}/-1\right) \right\}.$$

Beispiel 7.

$$\begin{aligned} 14x - 6y - 22z &= 76 \\ 18x + 4y - 120z &= 8 \\ 2x - 2y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

Wir lösen das LGS in der folgenden Reihenfolge:

1. "Vernichte" y aus I und II mit Hilfe von III
2. Behalte III und "vernichte" aus den verbleibenden zwei Gleichungen x aus II mit Hilfe von I

[3] Genau genommen können wir diese Liste erst im Anschluss an die Lösungsfindung formulieren, weil wir das genaue Vorgehen in der Regel zu Anfang noch nicht sehen! Außerdem ist die Reihenfolge des Vorgehens nicht eindeutig.

3. Dann gibt es in I nur noch z, in II nur noch x und z und in III sind noch x, y und z enthalten

4. Wir setzen der Reihe nach die gelösten Variablen ein

Nr.	LGS	Veränderung
I	$14x - 6y - 22z = 76$	
II	$18x + 4y - 120z = 8$	
III	$2x - 2y - 2z = 4$	
I	$8x - 16z = 64$	$I - 3 \cdot III$
II	$22x - 124z = 16$	$II + 2 \cdot III$
III	$2x - 2y - 2z = 4$	III
I	$x - 2z = 8$	$I : 8$
II	$11x - 62z = 8$	$II : 2$
III	$x - y - z = 2$	$III : 2$
I	$x - 2z = 8$	I
II	$-40z = -80$	$II - 11 \cdot I$
III	$x - y - z = 2$	III
I	$x - 2z = 8$	I
II	$z = 2$	$II : (-40)$
III	$x - y - z = 2$	III

In Gleichung II haben wir nun direkt die Lösung für z. Jetzt folgt das "Einsetzen":

$$z = 2 \text{ in } I: \qquad x - 2 \cdot 2 = 8, \text{ d.h. } x = 12$$

$$x = 12, z = 2 \text{ in } III: \qquad 12 - y - 2 = 2, \text{ d.h. } y = 8$$

also

$$\mathbb{L} = \{(12/8/2)\}.$$

Beispiel 8.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 49 \\ 3x + 4y + 5z &= 64 \\ x + 5y + 6z &= 79 \end{aligned}$$

Wir lösen das LGS in der folgenden Reihenfolge:

1. "Vernichte" x aus I und II mit Hilfe von III

2. Behalte III und "vernichte" aus den verbleibenden zwei Gleichungen y aus I mit Hilfe von II

3. Dann gibt es in I nur noch z, in II nur noch y und z und in III sind noch x, y und z enthalten

4. Wir setzen der Reihe nach die gelösten Variablen ein

Nr.	LGS	Veränderung
I	$2x + 3y + 4z = 49$	
II	$3x + 4y + 5z = 64$	
III	$x + 5y + 6z = 79$	
I	$- 7y - 8z = -109$	$I - 2 \cdot III$
II	$- 11y - 13z = -173$	$II - 3 \cdot III$
III	$x + 5y + 6z = 79$	III
I	$- 77y - 88z = -1199$	$I \cdot 11$
II	$- 77y - 91z = -1211$	$II \cdot 7$
III	$x + 5y + 6z = 79$	III
I	$3z = 12$	$I - II$
II	$- 11y - 13z = -173$	$II : 7$
III	$x + 5y + 6z = 79$	III
I	$z = 4$	$I : 3$
II	$- 11y - 13z = -173$	II
III	$x + 5y + 6z = 79$	III

In Gleichung I haben wir nun direkt die Lösung für z. Jetzt folgt das "Einsetzen":

$$z = 4 \text{ in } II: \quad -11y - 13 \cdot 4 = -173, \text{ d.h. } y = 11$$
$$y = 11, z = 4 \text{ in } III: \quad x + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 4 = 79, \text{ d.h. } x = 0$$

also

$$\mathbb{L} = \{(0/11/4)\}$$