

Lineare und affine Abbildungen der Ebene

Teil 0: Von der Funktion zur allgemeinen Abbildung

1 Funktionen

Bisher haben vor allem Funktionen kennengelernt, nämlich Funktionen deren Definitionsbereich und Wertebereich reelle Zahlen waren:

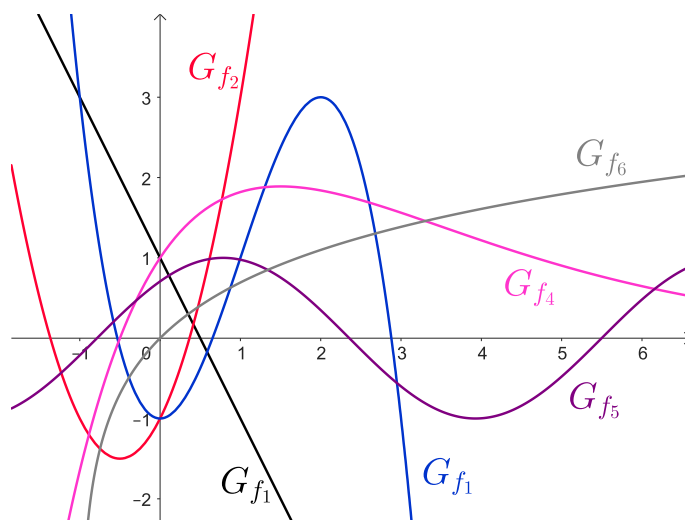
- die lineare Funktion, die quadratische Funktion aka die Parabel und verallgemeinert dann die ganzrationale Funktion.
- die Exponentialfunktion und als Verallgemeinerung diese kombiniert mit ganzrationalen Funktionen
- in Anwendungen noch die Logarithmusfunktion und die trigonometrischen Funktionen (z. B. Sinus-, Kosinus-, Tangensfunktion)

Gemeinsam hatten diese Funktionen, dass man auf grundsätzlich zwei Arten beschreiben konnte. Für eine Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ sind das:

1. Die Funktionsvorschrift $f(x)$: Sie beschreibt explizit was man mit einem Wert x des Definitionsbereichs tun muss, um das Bild $f(x)$ zu erhalten; z. B.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -2x + 1, & f_2(x) &= 2x^2 + 2x - 1, & f_3(x) &= -x^3 + 3x^2 + 2, \\ f_4(x) &= (2x + 1)e^{-0,5x}, & f_5(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), & f_6(x) &= \ln(x + 1). \end{aligned}$$

2. Der Graph G_f der Funktion: Dieser besteht für jeden Punkt $x \in \mathbb{D}$ aus allen Punkten $(x, f(x))$; z. B.



Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 31. Januar 2026

In der Praxis haben wir nicht zwischen der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, der Funktionsvorschrift $f(x)$ und dem Graphen G_f unterschieden, sondern haben alle drei miteinander identifiziert. Wir haben dann immer kurz von *der Funktion* $f(x)$ gesprochen und aus dem Kontext war klar, was in dem Moment gemeint war.

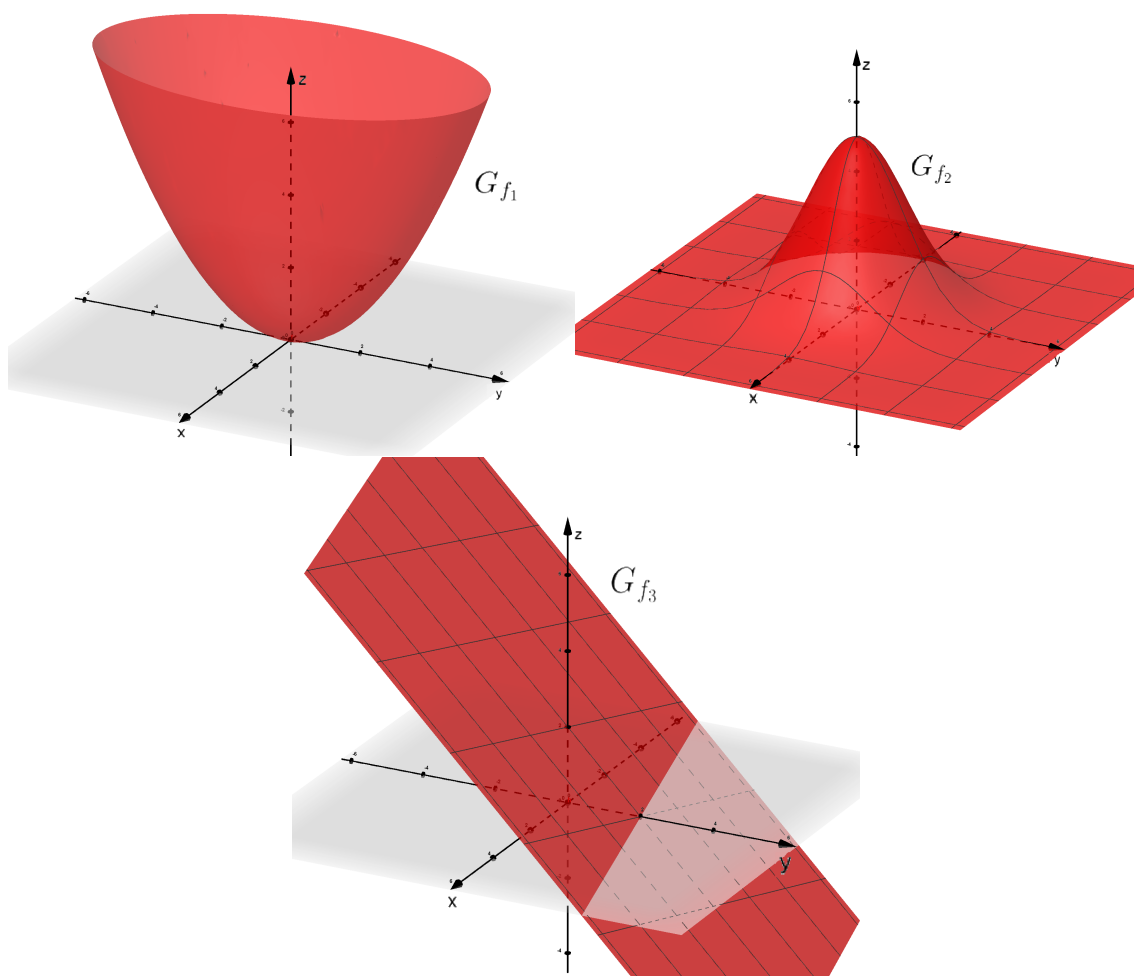
2 Von der Funktion zur Abbildung

2.1 Die Verallgemeinerung des Definitionsbereichs

Statt sich auf Definitionsbereiche in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu beschränken, kann man als Definitionsbereich auch Punkte im $\mathbb{R}^2$ zulassen. Für den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2$ erhält man dann Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Dies ist zunächst mal nicht viel schlimmer als vorher, denn auch hier kann man die Funktionen durch Funktionsvorschriften beschreiben, z. B.

$$f_1(x, y) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2, \quad f_2(x, y) = 5e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)}, \quad f_3(x, y) = \frac{1}{4}x - y + 2.$$

ähnlich wie bei "gewöhnlichen Funktion können wir auch den Graphen zeichnen. Dieser besteht aber nun nicht aus Punkten in der Ebene sondern aus Punkten im Raum: $(x, y, f(x, y))$; z. B.



Insbesondere das letzte Beispiel kommt uns bekannt vor. Schreiben wir $z = f(x, y)$, dann gibt $f(x, y) = \frac{1}{4}x - y + 2$ zunächst $z = \frac{1}{4}x - y + 2$ und nach Umstellen die Koordinatenform der Ebene, die wir auch in der Grafik sehen: $\frac{1}{4}x - y - z = -2$.¹

Jetzt kann hier weiter Verallgemeinern, indem man als Definitionsbereich Punkte im $\mathbb{R}^3$ zulässt. Mit Blick auf die Funktionsvorschrift ist das nicht viel komplizierter, weil nur eine Variable hinzukommt, z. B. $f(x, y, z) = 2xye^{-z^2+x^2y}$. Allerdings kann man den Graphen nicht mehr zeichnen, da man hier ein vierdimensionales Koordinatensystem bräuchte: drei Dimensionen für den Definitionsbereich und eine vierte Dimension für den Wert des Bildes, $(x, y, z, f(x, y, z))$. Ein solcher Graph oder auch nur eine Projektion davon in den dreidimensionalen Raum² überfordert in der Regel die Vorstellungskraft.

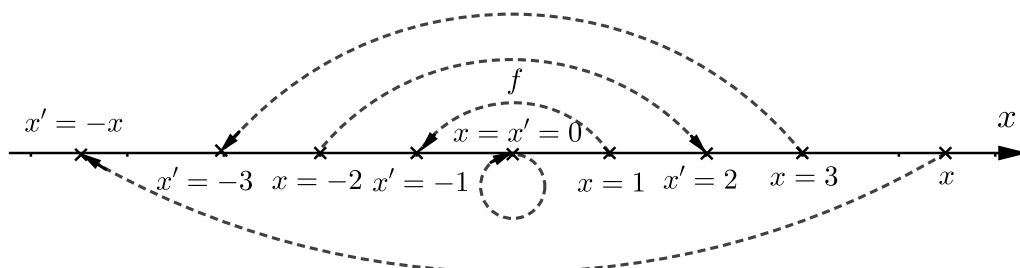
2.2 Die Verallgemeinerung des Wertebereichs

Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ haben wir mittels eines Graphen graphisch dargestellt. Es gibt allerdings eine andere Art der Darstellung, die mit einer Dimension auskommt. Dabei werden dann die Punkte x aus dem Definitionsbereich und ihre Bilder $x' = f(x)$ im gleichen eindimensionalen Koordinatensystem beschrieben – also auf der selben x -Achse. Diese Darstellung kann man interpretieren als "die Funktion f verzerrt die x -Achse".

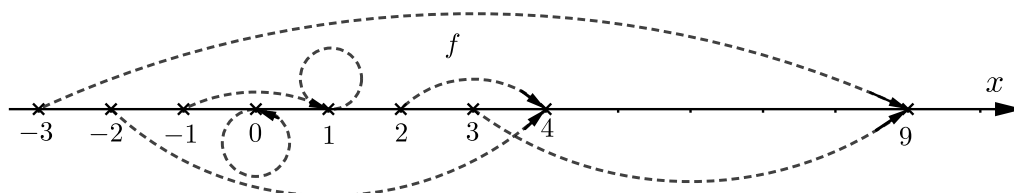
Für einige Beispiele sieht diese Idee dann wie folgt aus:

Beispiel 1.

- $f(x) = -x$



- $f(x) = x^2$



¹Auf die umgekehrte Weise lassen sich oft Funktionen nutzen um bekannte Graphen zu beschreiben. Z. B. Ist eine Kugeloberfläche mit Radius R durch alle Punkte gegeben, die vom Ursprung den gleichen Abstand haben, also $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Das kann man nach z auflösen und erhält $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Damit erhalten wir zwei Funktionen, die jeweils die obere oder untere Halbkugel beschreiben, je nachdem ob man das obere oder untere Vorzeichen wählt.

²Analog zu unserem Vorgehen bei Funktionen $f(x, y)$, wo wir den Graphen und das dreidimensionale Koordinatensystem in die zweidimensionale Zeichenebene projiziert haben.

Diese Art der Darstellung ist nicht so anschaulich, wie der klassische Graph. Sie hat aber den Vorteil, dass sie sich auch auf höhere Dimensionen verallgemeinern lässt.

Wir konzentrieren uns im Folgenden auf Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, also Abbildungen deren Definitionsbereich und Wertebereich in der Ebene liegen.

Eine solche Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bildet einen Punkt $B = (x, y)$ auf einen Bildpunkt $f(x, y) = B' = (x', y')$ ab.

Zur Beschreibung der Abbildung reicht es also aus, zu wissen, wie man die x -Komponente x' des Bildpunktes B' und wie man die y -Komponente y' des Bildpunktes B' jeweils aus $B = (x, y)$ erhält.

Das kann mit zwei Funktionen $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ machen, für die dann $x' = f_1(x, y)$ und $y' = f_2(x, y)$ gilt. So bekommt man

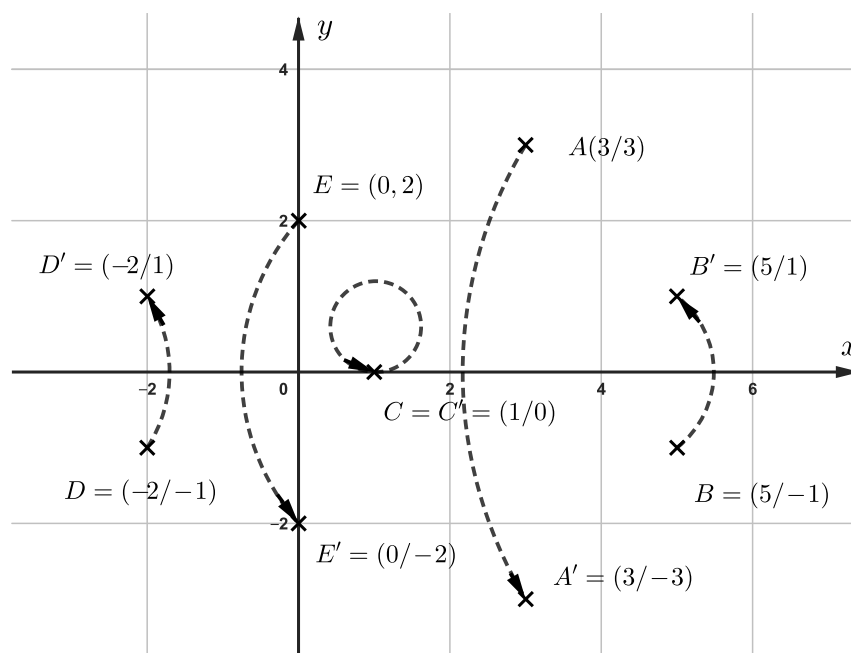
$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

Für einen Graphen würde man vier Dimensionen benötigen (zwei für den Definitionsbereich und zwei für den Wertebereich) – also zu viele. Deshalb ist hier die Darstellung in einem einzigen xy -Koordinatensystem sinnvoll mit der Interpretation: "die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ verzerrt die Ebene".³

Bevor wir uns speziellen (einfachen) Abbildungen zuwenden, hier zwei Beispiele:

Beispiel 2.

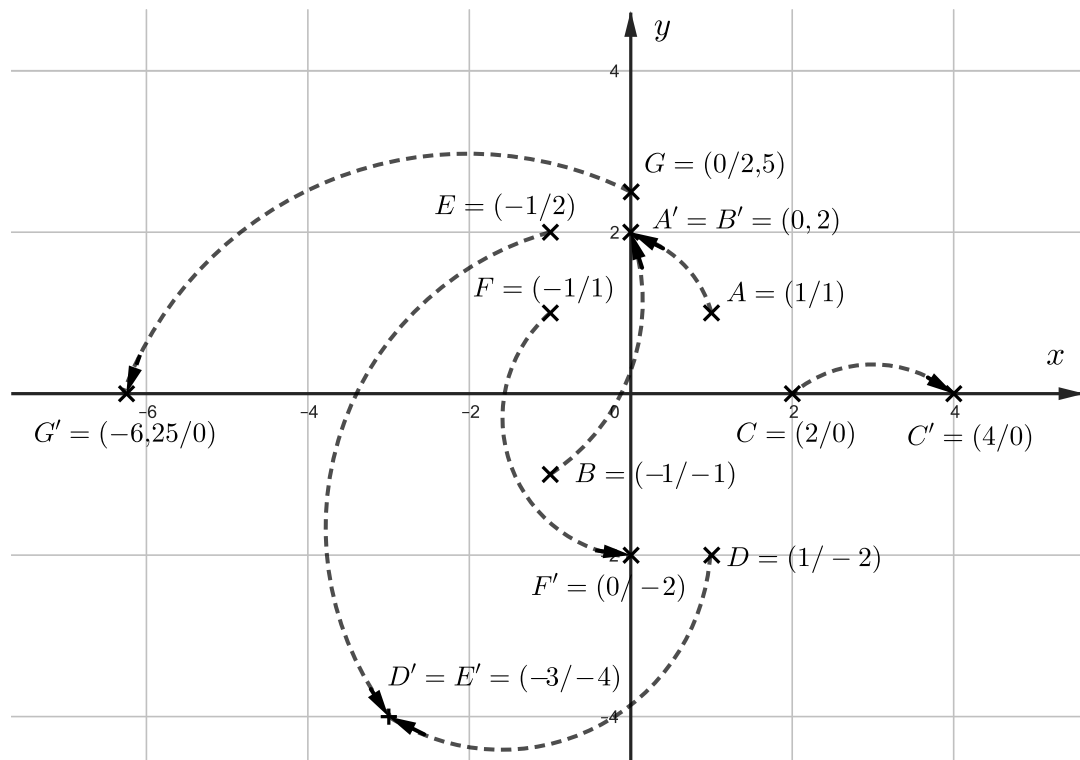
- $f(x, y) = (x, -y)$



Dieses Beispiel beschreibt die Spiegelung an der x -Achse.

³Diese Form der Darstellung ist so ohne Weiteres auch für Funktionen von $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ möglich.

- $f(x) = (x^2 - y^2, 2xy)$



Das zweite Beispiel ist etwas komplizierter; es hat jedoch eine sehr wichtige Bedeutung: es beschreibt graphisch das Quadrieren komplexer Zahlen. Insbesondere gibt es "Zahlen" deren Quadrat auf der negativen x -Achse liegt, hier z. B. $(0/2, 5)$.

Fazit: Man sieht insbesondere an dem zweiten Beispiel, dass die Untersuchung allgemeiner Abbildungen der Ebene sehr kompliziert werden kann. Deshalb werden wir uns im Folgenden auf Abbildungen beschränken, die sich verhältnismäßig einfach, aber auf alle Fälle sehr systematisch untersuchen lassen.