

Lineare und affine Abbildungen der Ebene

Teil 1: Lineare Abbildungen

1 Lineare Abbildungen der Ebene

1.1 Notation und erste Beispiele

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt **lineare Abbildung**, wenn sie durch eine Funktionsvorschrift¹

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Dabei sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vier Parameter, die die lineare Abbildung eindeutig beschreiben. Deshalb schreiben wir auch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und nennen $A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die zur linearen Abbildung f gehörige **Matrix**.

Aus ihrer "einfachen" Darstellung linearer Abbildungen der Ebene folgen direkt einige erste Eigenschaften:

- Fakt 1.**
1. Für jede lineare Abbildung gilt $f(0, 0) = (0, 0)$; d. h., der Nullpunkt wird immer auf sich selbst abgebildet.
 2. Jede lineare Abbildung ist durch die Bilder $f(1, 0)$ und $f(0, 1)$ eindeutig festgelegt. Wegen $f(1, 0) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ und $f(0, 1) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ sind die Bilder nämlich gerade die Spalten der Matrix A_f .

Auch erste einfache Beispiele lassen sich angeben:

Beispiel 2. 1. Die identische Abbildung $f(x, y) = (x, y)$ ist eine lineare Abbildung.

Die zugehörige Matrix ist $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und heißt auch *Einheitsmatrix*.

2. Die Abbildung $f(x, y) = (0, 0)$, die alle Punkte auf $(0, 0)$ abbildet ist eine lineare Abbildung. Die Matrix $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und heißt auch *Nullmatrix*.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm

E-Mail: mail@frank-klinker.de

Version: 3. Februar 2026

¹Wir werden hier oft nicht zwischen der Beschreibung (x, y) eines Punktes und der Beschreibung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ des zugehörigen Ortsvektors unterscheiden.

3. Die Abbildung $f(x, y) = (x, -y)$ entspricht geometrisch der Spiegelung an der x -Achse. Ihre Matrix ist $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. Die Abbildung $f(x, y) = (-x, y)$ entspricht geometrisch der Spiegelung an der y -Achse. Ihre Matrix ist $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Die Abbildung $f(x, y) = (-x, -y)$ entspricht geometrisch der Punktspiegelung der Ebene am Nullpunkt $(0, 0)$. Die Matrix zu f ist $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
6. Die Abbildung $f(x, y) = (y, x)$ entspricht geometrisch der Spiegelung der Ebene an der Winkelhalbierenden. Die Matrix zu f ist $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. Die Abbildung $f(x, y) = (ay, ax)$ entspricht geometrisch der Streckung² der Ebene um den Faktor a mit Streckzentrum $(0, 0)$. Ihre Matrix ist $A_f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

1.2 Wichtige Eigenschaften linearer Abbildungen der Ebene

Wir sammeln zunächst einige wichtige und nützliche Eigenschaften linearer Abbildungen

Fakt 3. Für eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt:

1. $f(x, y) = x \cdot f(1, 0) + y \cdot f(0, 1)$
2. $f(x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2) = f(x_1, y_1) \pm f(x_2, y_2)$
3. $f(ax, ay) = a f(x, y)$
4. Eine Gerade wird durch f auf Gerade abgebildet.
5. Eine Ursprungsgerade wird durch f auf eine Ursprungsgerade abgebildet.
6. Parallele Geraden werden durch f auf parallele Geraden abgebildet.

Die Punkte 1 bis 3 sieht man direkt, wenn man die linke und die rechte Seite der Gleichungen getrennt ausrechnet und vergleicht.

Die Punkte 4 bis 6 sieht man am Besten, wenn man sich in Erinnerung ruft, dass man eine Gerade durch eine Parameterform beschreiben kann. Mit Hilfe eines Aufpunktes (a_1, a_2) und eines Richtungsvektors $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ erhält man alle Punkte (x, y) der Gerade durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ist nun $f(x, y)$ eine lineare Abbildung, dann ist wegen der Punkte 2 und 3

$$f(x, y) = f(a_1, a_2) + t \cdot f(v_1, v_2)$$

²Für $a > 1$ handelt es sich um eine "echte" Streckung, für $0 < a < 1$ um eine Stauchung und für $a < 0$ kommt eine Punktspiegelung um $(0, 0)$ hinzu. Die Fälle $a = 1$ und $a = 0$ sind die ersten beiden Beispiele.

Damit ist das Bild der Geraden ebenfalls eine Gerade, wobei der neue Aufpunkt $f(a_1, a_2)$ und der neue Richtungsvektor $f(v_1, v_2)$ die Bilder der alten sind.

Beispiel 4. Sind $f(1, 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $f(0, 1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben, dann sind

$$f(3, -5) = 3f(1, 0) - 5f(0, 1) = 3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -13 \end{pmatrix}$$

und

$$f(-2, 2) = -2f(1, 0) + 2f(0, 1) = -2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dann

$$f(1, -3) = f(3, -5) + f(-2, 2) = \begin{pmatrix} -11 \\ -13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenschaft 1 aus Fakt 3 ist ja lediglich eine Umformulierung der Tatsache, dass eine lineare Abbildung durch die Bilder von $(1, 0)$ und $(0, 1)$ festgelegt ist. Diese lässt sich aber noch stark verallgemeinern:

Fakt 5. Wenn zwei Punkte P und Q nicht auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden liegen, dann ist eine lineare Abbildung f durch die Angabe der Bilder $f(P)$ und $f(Q)$ eindeutig beschrieben.

Hinweis: P und Q liegen nicht auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden, wenn ihre beiden Ortsvektoren keine Vielfachen voneinander sind.

Wir sehen uns das an zwei Beispielen an. Dabei lässt sich insbesondere das Beispiel 1 zu einer Begründung von Fakt 5 ausbauen.³

Beispiel 6. 1. Gesucht ist eine Beschreibung der linearen Abbildung f mit den Bildern $f(-1, 4) = (3, 1)$ und $f(2, 2) = (2, 4)$ der Punkte $P = (-1, 4)$ und $Q = (2, 2)$ (deren Ortsvektoren sind keine Vielfachen voneinander).

Wir setzen die Abbildung als $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ an und erhalten

$$f(-1, 4) = \begin{pmatrix} -a + 4b \\ -c + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(2, 2) = \begin{pmatrix} 2a + 2b \\ 2c + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir das komponentenweise schreiben, ist das ein LGS für die vier Parameter a, b, c, d :

$$\begin{aligned} -a + 4b &= 3 \\ -c + 4d &= 1 \\ 2a + 2b &= 2 \\ 2c + 2d &= 4 \end{aligned}$$

mit der Lösung $a = 0,2$, $b = 0,8$, $c = 1,4$ und $d = 0,6$, also

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 1,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

³Die Bedingung, dass P und Q nicht auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden liegen, sorgt dafür, dass das LGS eine eindeutige Lösung hat.

2. Gesucht ist eine Beschreibung der linearen Abbildung f mit den Bildern $f(0, 1) = (3, 2)$ und $f(4, 6) = (6, 8)$ der Punkte $P = (0, 1)$ und $Q = (4, 6)$ (deren Ortsvektoren sind keine Vielfachen voneinander).

Statt genauso vorzugehen wie im ersten Beispiel, nutzen wir hier aus, dass wir ja bereits die zweite Spalte der Matrix von f kennen; nämlich $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Bild von $(0, 1)$. Wir brauchen also noch das Bild von $(1, 0)$. Dazu rechnen wir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das gibt

$$f(1, 0) = \frac{1}{4} f(4, 6) - \frac{3}{2} f(0, 1) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

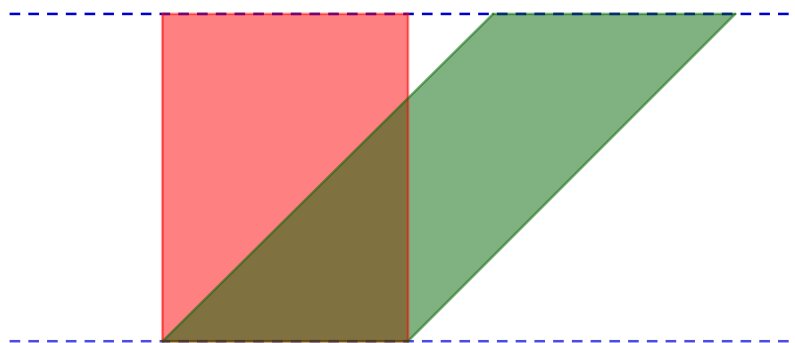
und schließlich

$$A_f = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2 Zentrale Beispiele

2.1 Scherung entlang der Achsen

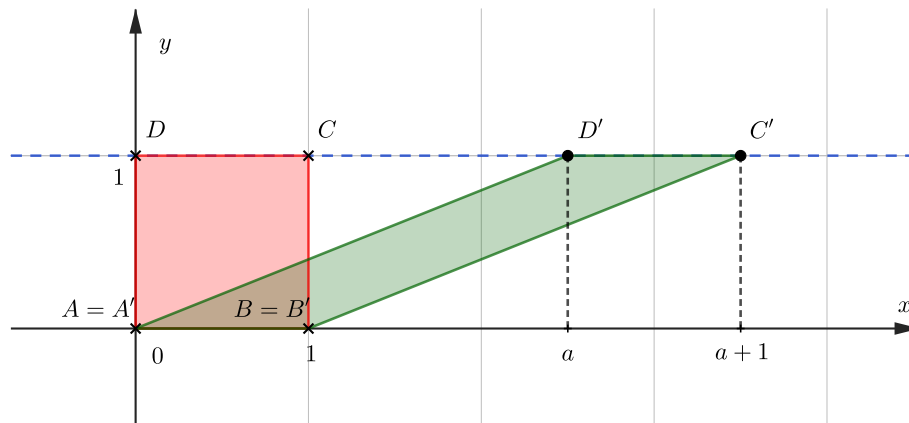
Aus der Mittelstufe wissen wir, dass ein Viereck seinen Flächeninhalt behält, wenn man es entlang einer Seite **schert**; so wie hier die beiden Vierecke, die durch Scherung entlang der gestrichelten Richtung auseinander hervorgehen.



Eine solche Scherung lässt sich mittels einer linearen Abbildung beschreiben. Dazu beschränken wir uns zunächst auf eine Scherung in x -Richtung.

Weil wir ja bereits wissen, dass es ausreicht die Bilder der Punkte $(1, 0)$ und $(0, 1)$ zu kennen sehen wir uns an, was mit dem Einheitsquadrat⁴ bei einer solchen Scherung passiert:

⁴Das Einheitsquadrat hat die Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 1)$.



Die Bilder von $(1, 0)$ und $(0, 1)$ sind

$$f(1, 0) = (1, 0) \quad \text{und} \quad f(0, 1) = (a, 1).$$

Damit sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ die Spalten der **Schermatrix (in x -Richtung)**:

$$S_{x,a} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die lineare Abbildung ist

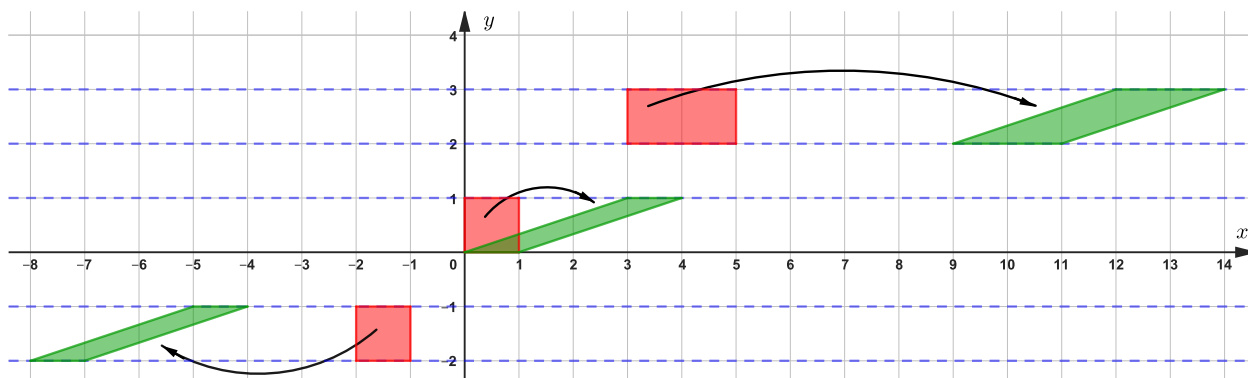
$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x + ay \\ y \end{pmatrix}.$$

Der Parameter a heißt auch **Scherparameter**.

Bemerkung 7. Weil ja das Bild von $(1, 0)$ bereits festliegt, reicht zur Bestimmung der Scherung das Bild eines weiteren Punktes aus – solange dieser zweite Punkt nicht auf der x -Achse liegt!

Beispiel 8. Wir sehen uns die Abbildung $f(x, y) = \begin{pmatrix} x + 3y \\ y \end{pmatrix}$, bzw. $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dies ist eine Scherung mit Scherparameter $a = 3$.

Wie man in dem folgenden Bild sieht, gibt dieser Wert an, um welchen Faktor im Bild die Deckseite eines Rechtecks im Gegensatz zur Grundseite verschoben ist.



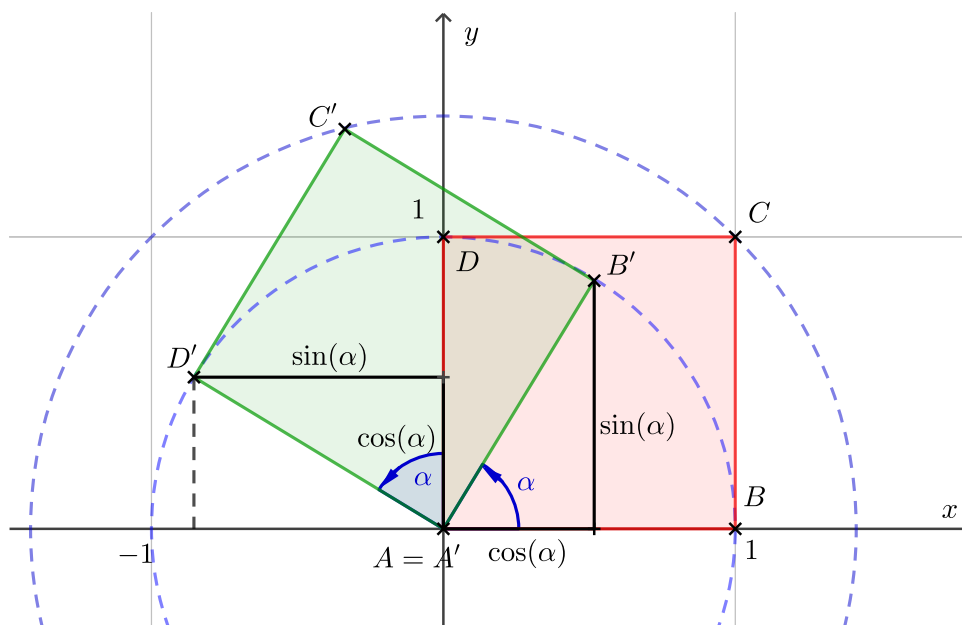
Bemerkung 9. 1. Alle Punkte der x -Achse werden bei einer Scherung in x -Richtung auf sich selbst abgebildet. Solche Punkte nennt man auch **Fixpunkte** der Abbildung.

2. Eine Scherung in y -Richtung hat die Form $f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y + ax \end{pmatrix}$ mit Schermatrix (in y -Richtung) $S_{y,a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$. Das obige bleibt alles gültig, wenn man jeweils die Argumentation mit x und y vertauscht wiederholt.

Bei der Scherung in y -Richtung werden alle Punkte der y -Achse auf sich selbst abgebildet, sind also Fixpunkte

2.2 Rotation um den Nullpunkt

Eine Rotation um den Nullpunkt um den Winkel α dreht die Ebene gegen den Uhrzeigersinn⁵. Auch hier reicht es wieder aus, wenn man sich das Bild des Einheitsquadrats ansieht:



Die Bilder der Punkte $(1, 0)$ und $(0, 1)$ erhält man aus den jeweils rechtwinkligen Dreiecken⁶:

$$f(1, 0) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \quad \text{und} \quad f(0, 1) = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha)).$$

Damit ergibt sich die **Rotationsmatrix**

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

und die Abbildung

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot x - \sin(\alpha) \cdot y \\ \sin(\alpha) \cdot x + \cos(\alpha) \cdot y \end{pmatrix}.$$

⁵Gegen den Uhrzeigersinn ist die mathematisch positive Drehrichtung.

⁶Vorsicht mit den Vorzeichen!

- Beispiel 10.** 1. Das Bild oben beschreibt eine Drehung um einen Winkel von etwa $\alpha = 59^\circ$.
2. Einige spezielle Drehmatrizen:

$$R_{90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{180^\circ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_{45^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

Bemerkung 11. Eine Drehung hat entweder nur den Fixpunkt $(0,0)$ oder alle Punkte sind Fixpunkte. Der erste Fall ist Standard, denn der zweite Fall tritt nur immer dann ein, wenn der Drehwinkel ein Vielfaches von 360° ist.