

Lineare und affine Abbildungen der Ebene

Teil 2: Affine Abbildungen

1 Affine Abbildungen

Mit Hilfe linearer Abbildungen lassen sich Operationen der Ebene sehr systematisch beschreiben, z. B. Scherungen, Drehungen, Streckungen oder Kombinationen davon wie etwa die Drehstreckung.

Aber was machen wir, wenn die Rotation nicht um $(0,0)$ sondern um ein anderes Zentrum geschieht, oder wenn zwar in x -Richtung geschert wird, aber die Fixpunkte auf einer Geraden parallel zur x -Achse liegen?

Grob kann man sagen:

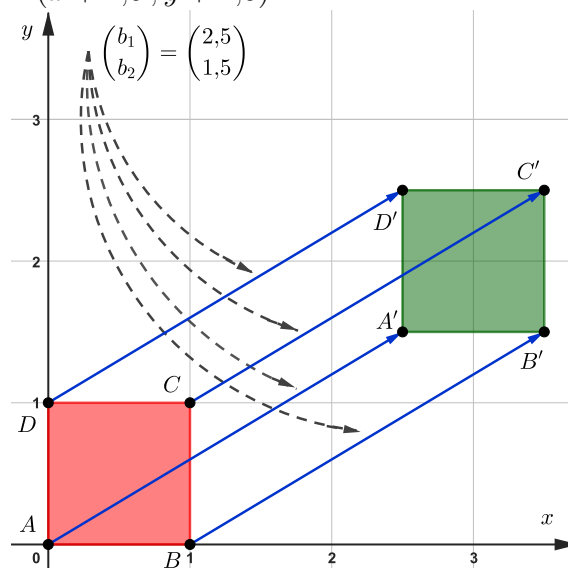
Eine affine Abbildung ist die Kombination einer linearen Abbildung mit einer Verschiebung

1.1 Die Verschiebung

Eine sehr einfache Abbildung ist die Verschiebung. Als Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ordnet diese jedem Punkt der Ebene einen stets auf die gleiche Art verschobenen Punkt zu:

$$f(x, y) = (x + b_1, y + b_2) \quad \text{oder} \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1. $f(x, y) = (x + 2,5, y + 1,5)$



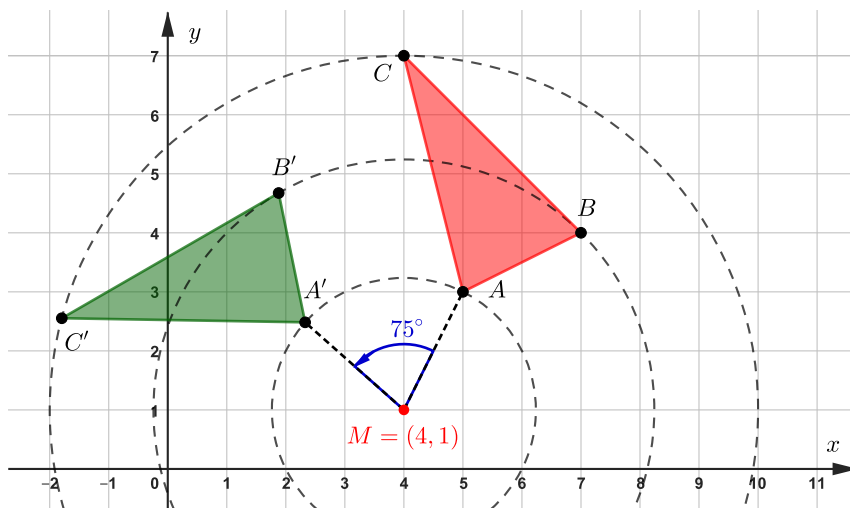
Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
 E-Mail: mail@frank-klinker.de
 Version: 3. Februar 2026

1.2 Die Idee der affinen Abbildung der Ebene an zentrale Beispielen

Um zu verstehen, wie man affine Abbildungen beschreiben kann, beginnen wir mit zwei zentralen Beispielen.

1.2.1 Die Rotation um einen beliebigen Drehpunkt

Wir sehen uns eine Rotation um den Mittelpunkt $(4, 1)$ mit dem Drehwinkel $\alpha = 75^\circ$ an:

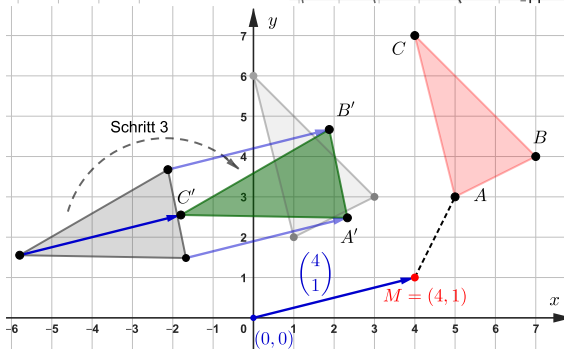
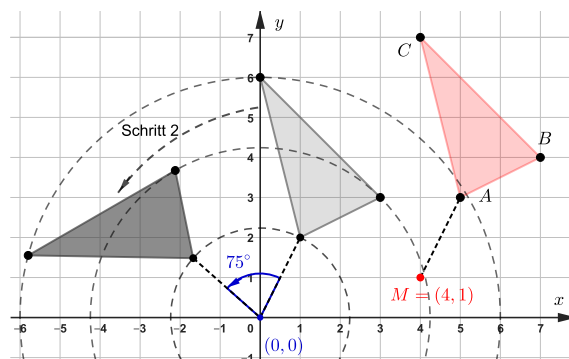
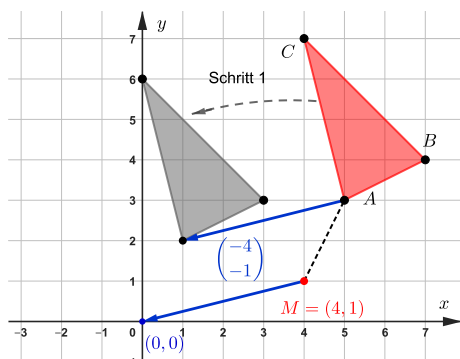


Um diese Abbildung geeignet zu beschreiben gehen wir in drei Schritten vor:

Schritt 1. Wir verschieben das Drehzentrum mit Hilfe einer Verschiebung in den Nullpunkt.

Schritt 2. Wir drehen um den Nullpunkt $(0, 0)$ um den Winkel $\alpha = 75^\circ$.

Schritt 3. Wir verschieben das Drehzentrum $(0, 0)$ mit Hilfe einer Verschiebung wieder zurück nach M .



Nutzen wir die Matrixschreibweise, dann ist die Abbildung

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(75^\circ) & -\sin(75^\circ) \\ \sin(75^\circ) & \cos(75^\circ) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ Schritt 2 $\downarrow$ Schritt 1 $\uparrow$ Schritt 3

oder

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(75^\circ) \cdot (x - 4) - \sin(75^\circ) \cdot (y - 1) + 4 \\ \sin(75^\circ) \cdot (x - 4) + \cos(75^\circ) \cdot (y - 1) + 1 \end{pmatrix}$$

Dieses Beispiel kann man direkt verallgemeinern:

Eine Drehung um den Punkt $M = (m_1, m_2)$ mit Drehwinkel α wird durch folgende affine Abbildung beschrieben:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

oder

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot (x - m_1) - \sin(\alpha) \cdot (y - m_2) + m_1 \\ \sin(\alpha) \cdot (x - m_1) + \cos(\alpha) \cdot (y - m_2) + m_2 \end{pmatrix}$$

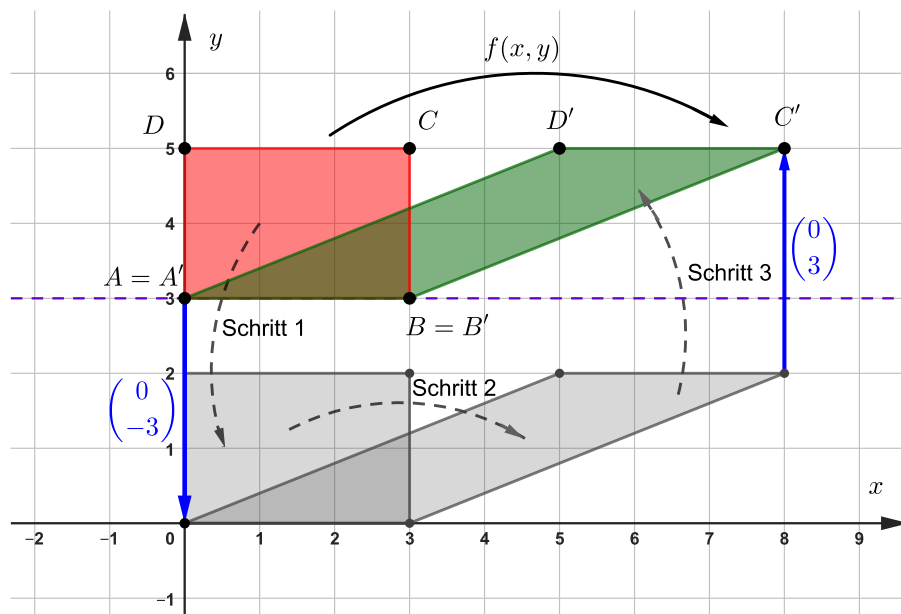
1.3 Die Scherung mit Scherachse parallel zu x - oder y -Achse

Auch hier starten wir mit einem Beispiel, an dem man das allgemeine Vorgehen erkennt.

Wir Scheren mit dem Scherfaktor $a = 2,5$ und als Scherachse wählen wir die Gerade $y = 3$ parallel zur x -Achse.

Auch hier gehen wir in drei Schritten vor

- Schritt 1. Wir verschieben die Scherachse mit Hilfe einer Verschiebung auf die x -Achse.
- Schritt 2. Wir Scheren nun mit x -Achse als Scherachse.
- Schritt 3. Wir verschieben die x -Achse mit Hilfe einer Verschiebung wieder zurück zur ursprünglichen Scherachse.



Auch hier nutzen wir die Matrixschreibweise, dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{c}
 \text{Schritt 1} \\
 \downarrow \\
 f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2,5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{ccc}
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Schritt 2} & & \text{Schritt 3}
 \end{array}
 \end{array}$$

oder

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x + 2,5 \cdot (y - 3) \\ y \end{pmatrix}$$

Auch dieses Beispiel lässt sich direkt verallgemeinern:

Eine Scherung mit Scherachse $y = y_0$ parallel zur x -Achse und Scherfaktor s wird durch folgende affine Abbildung beschrieben:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

oder

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x + s \cdot (y - y_0) \\ y \end{pmatrix}$$

Eine Scherung mit Scherachse $x = x_0$ parallel zur y -Achse und Scherfaktor s wird durch folgende affine Abbildung beschrieben:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y + s \cdot (x - x_0) \end{pmatrix}$$

2 Eigenschaften affiner Abbildungen

2.1 Allgemeine Darstellung affiner Abbildungen

Wenn man die Formeln für beiden zentralen Beispiele aus dem vorigen Abschnitt umformt, dann sieht man, dass sie beide die Form

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \quad (*)$$

besitzen.

- Im Fall der Rotation mit Drehpunkt $M = (m_1, m_2)$ und Winkel α ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \cdot (1 - \cos(\alpha)) + m_2 \cdot \sin(\alpha) \\ m_2 \cdot (1 - \cos(\alpha)) - m_1 \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

- Im Fall der Scherung mit Scherachse $y = y_0$ und Scherfaktor s ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \cdot y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Nachteil der Schreibweisen ist, dass die im vorigen Abschnitt verwendete geometrische Idee verloren geht. Ein Vorteil ist die kompaktere Schreibweise in (*).

Außerdem ist die kompakte Schreibweise hilfreich, wenn man eine Abbildungseigenschaft von affinen Abbildungen untersuchen möchte, die ganz ähnlich zu der von linearen Abbildungen ist.

2.2 Eine wichtige Abbildungseigenschaft affiner Abbildungen

Eine lineare Abbildung war durch die Angabe der Bilder zweier Punkte der Ebene vollständig erklärt (solange die beiden gewählten Punkte nicht auf einer Geraden durch den Ursprung liegen). Eine gute Wahl war z. B. $(1, 0)$ und $(0, 1)$, weil die Bilder dann gerade die Spalten der Matrix waren. Im allgemeinen Fall konnte man ein lineares Gleichungssystem lösen, um die vier Einträge der Matrix zu finden.

Bei affinen Abbildungen ist das ganz ähnlich:

Fakten 2. Wenn drei Punkte P , Q und R nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen – sie also ein echtes Dreieck bilden –, dann ist eine affine Abbildung f durch die Angabe der Bilder $f(P)$, $f(Q)$ und $f(R)$ eindeutig beschrieben.

Hinweis: P , Q und R bilden ein echtes Dreieck, wenn die Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ keine Vielfachen voneinander sind.

Wir sehen uns das an einem Beispiel an. An diesem sieht man auch, dass man auf diese Weise eine Begründung für Fakt 2 bekommt.¹

Beispiel 3. Wir suchen die affine Abbildung mit der Eigenschaft $f(1, 1) = (2, 1)$, $f(-1, 1) = (0, 3)$ und $f(1, 2) = (-1, 4)$.

Dazu schreiben wir die gesuchte Funktion $f(x, y)$ in der Form

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + m \\ cx + dy + n \end{pmatrix}$$

an und setzen die gegebenen Punkte ein:

$$\begin{aligned} f(1, 1) &= \begin{pmatrix} a + b + m \\ c + d + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f(-1, 1) &= \begin{pmatrix} -a + b + m \\ -c + d + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ f(1, 2) &= \begin{pmatrix} a + 2b + m \\ c + 2d + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oder in Komponenten

$$\begin{aligned} a + b + m &= 2 \\ c + d + n &= 1 \\ -a + b + m &= 0 \\ -c + d + n &= 3 \\ a + 2b + m &= -1 \\ c + 2d + n &= 4 \end{aligned}$$

Dieses LGS hat die Lösung $a = 1, b = -3, c = -1, d = 3, m = 4, n = -1$, sodass

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y + 4 \\ -x + 3y - 1 \end{pmatrix}$$

¹Die Bedingung, dass P , Q und R nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, sorgt dafür, dass das LGS eine eindeutige Lösung hat.