

Lineare und affine Abbildungen der Ebene

Teil 3: Matrizen – mehr als eine Schreibweise für lineare Abbildungen

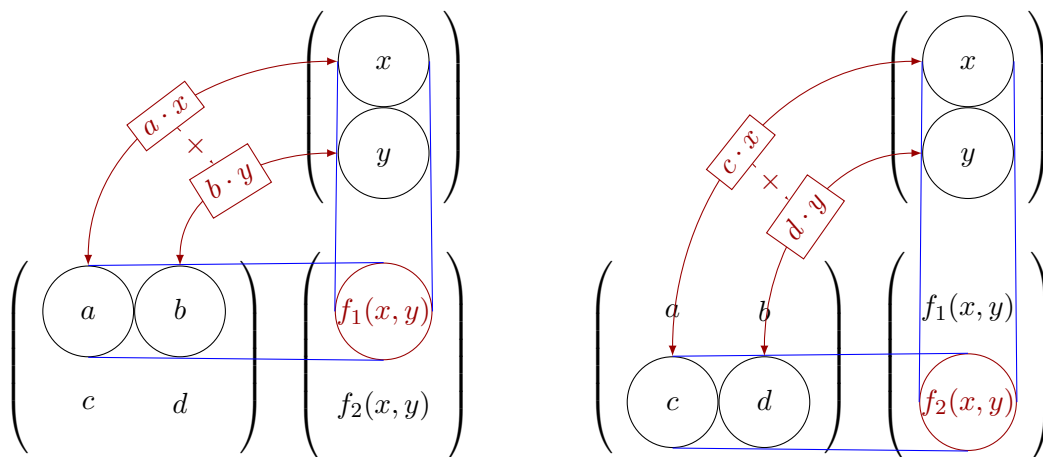
1 Matrixmultiplikation

Wir wissen, dass lineare Abbildungen durch vier Zahlen a , b , c und d eindeutig beschreiben wird. Deshalb haben wir **Matrizen** verwendet, um das symbolisch darzustellen:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die rechte Seite ist aber mehr als eine Schreibweise, denn bei handelt es sich um ein echtes Produkt: $f(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Dabei ist dieses Produkt genau so definiert, dass genau das gewünschte herauskommt:



Das Produkt aus Matrix und Vektor gibt einen Vektor

Dieses Beispiel kann man erweitern, sodass man auch zwei Matrizen miteinander multiplizieren kann.

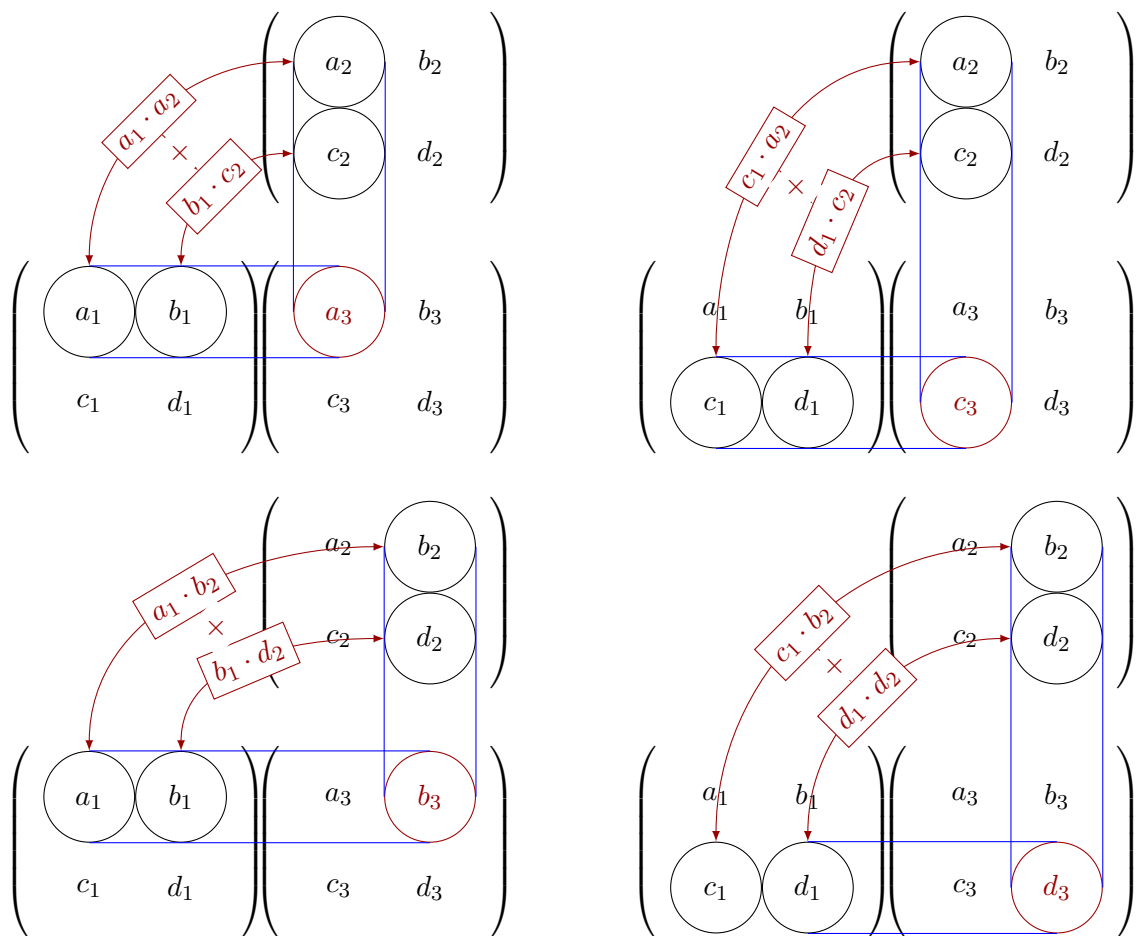
Für zwei Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ bekommt man das Produkt

$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ auf eine analoge Art – man muss nur die zwei Spalten von B unabhängig voneinander verwenden:

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm

E-Mail: mail@frank-klinker.de

Version: 15. Februar 2026



In Matrixform sieht das dann so aus:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

Das Produkt zweier Matrizen gibt eine Matrix

Die Multiplikation zwischen Matrizen und Vektoren bzw. Matrizen und Matrizen hat nützliche Rechenregeln. Deren Gültigkeit rechnet man mit den Definitionen von oben "einfach" nach.

Im folgenden sind A, B, C Matrizen und $\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren.

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ und $A \cdot (B \cdot \vec{b}) = (A \cdot B) \cdot \vec{b}$

Bei der Multiplikation ist die Reihenfolge egal – es gilt also das Assoziativgesetz.

- $A \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = A \cdot \vec{a} + A \cdot \vec{b}$

Bei Multiplikation gilt das Distributivgesetz.

Achtung: Bei der Multiplikation darf man die beiden Faktoren nicht vertauschen!

- Bei der Multiplikation zwischen Matrix und Vektor ist das Vertauschen der Faktoren gar nicht definiert!
- Bei der Multiplikation zweier Matrizen ergibt das Vertauschen der Faktoren in der Regel ein anderes Ergebnis!

$$\text{Z. B. } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ aber } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Matrizen und lineare Abbildungen

2.1 Matrixmultiplikation und Verkettung linearer Abbildungen

Wenn wir zwei lineare Abbildungen $f(x, y) = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ c_1x + d_1y \end{pmatrix}$ und $g(x, y) = \begin{pmatrix} a_2x + b_2y \\ c_2x + d_2y \end{pmatrix}$ haben, dann ist auch die **Hintereinanderausführung** oder **Verkettung** $h(x, y) = g(f(x, y))$ eine lineare Abbildung. Dieser Abbildung $h(x, y)$ kann man deshalb ebenfalls eine Matrix zuordnen. Dazu berechnet man:

$$h(x, y) = f(g(x, y)) = g(a_2x + b_2y, c_2x + d_2y) = \begin{pmatrix} a_1(a_2x + b_2y) + b_1(c_2x + d_2y) \\ c_1(a_2x + b_2y) + d_1(c_2x + d_2y) \end{pmatrix}$$

Wenn man die beiden Komponenten von $h(x, y)$ umsortiert, dann gibt das

$$h(x, y) = f(g(x, y)) = \begin{pmatrix} (a_1a_2 + b_1c_2)x + (a_1b_2 + b_1d_2)y \\ (c_1a_2 + d_1c_2)x + (c_1b_2 + d_1d_2)y \end{pmatrix}$$

Man erhält als Matrix also genau das Produkt $A_g \cdot A_f$ der beiden Matrizen $A_f = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ von $f(x, y)$ und $A_g = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ von $g(x, y)$.

Das ist kein Zufall! Dazu nutzt man die Matixschreibweise und interpretiert $g(x, y)$ als Vektor:

$$h(x, y) = f(g(x, y)) = A_f \cdot g(x, y) = A_f \cdot \left(A_g \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = (A_f \cdot A_g) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2.2 Beispiele

Beispiel 1 (Die Verkettung von Scherungen mit gemeinsamer Scherachse).

Zwei Scherungen $f(x, y) = \begin{pmatrix} x+ay \\ y \end{pmatrix}$ und $g(x, y) = \begin{pmatrix} x+by \\ y \end{pmatrix}$ mit x -Achse als gemeinsamer Scherachse lassen sich mit Hilfe der Matrizen $A_f = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A_g = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschreiben.

Die Verkettung $f(g(x, y))$ ist dann ebenfalls eine Scherung an der gleichen Achse mit der Matrix

$$A_f \cdot A_g = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Insbesondere spielt es hier keine Rolle, ob man $f(g(x, y))$ oder $g(f(x, y))$ berechnet: beides gibt das gleiche Ergebnis. Das ist geometrisch klar, denn ob man zuerst um den Faktor a schert und danach um den Faktor b oder umgekehrt, ist egal.

Bemerkung: Zwei Scherungen deren gemeinsame Scherachse die y -Achse ist, behandelt man ganz analog.

Beispiel 2 (Die Verkettung von Rotationen).

Zwei Rotationen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ um das Drehzentrum $(0, 0)$ lassen sich mit Hilfe der Matrizen $A_f = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ und $A_g = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$ beschreiben.

Die Verkettung $f(g(x, y))$ ist dann ebenfalls eine Drehung mit Drehzentrum $(0, 0)$ und zwar mit dem Winkel $\alpha + \beta$. Die zugehörige Matrix ist dann¹

$$\begin{aligned} A_f \cdot A_g &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung: Auch hier spielt es keine Rolle, ob man $f(g(x, y))$ oder $g(f(x, y))$ berechnet: beides gibt das gleiche Ergebnis. Das ist geometrisch klar, denn ob man erst um den Winkel α dreht und danach um den Winkel β oder umgekehrt, ist egal.

Beispiel 3 (Die Verkettung von Rotation und Streckung).

Eine Rotationen $f(x, y)$ um das Drehzentrum $(0, 0)$ und eine Streckung $g(x, y)$ um den Faktor s mit Streckzentrum $(0, 0)$ lassen sich mit Hilfe der Matrizen $A_f = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ und $A_g = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ beschreiben.

Die Verkettung $f(g(x, y))$ ist dann eine Drehstreckung mit der Matrix

$$A_f \cdot A_g = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos(\alpha) & -s \sin(\alpha) \\ s \sin(\alpha) & s \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Wie bereits in den ersten beiden Beispielen spielt es wieder keine Rolle, ob man $f(g(x, y))$ oder $g(f(x, y))$ berechnet: beides gibt das gleiche Ergebnis. Das ist geometrisch klar, denn ob man erst dreht und danach streckt oder umgekehrt, ist egal.

¹Im letzten Schritt der Rechnung werden die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus verwendet: $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ und $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

Beispiel 4 (Die Verkettung von Rotation und Scherung).

Eine Rotationen $f(x, y)$ um das Drehzentrum $(0, 0)$ mit Drehwinkel φ und eine Scherung $g(x, y)$ mit x -Achse als Scherachse und Scherfaktor a lassen sich mit Hilfe der Matrizen $A_f = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ und $A_g = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschreiben.

Die Verkettung $f(g(x, y))$ besitzt dann die Matrix

$$A_f \cdot A_g = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & a \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & a \sin(\varphi) + \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Ändert man die Reihenfolge von $f(x, y)$ und $g(x, y)$ in der Verkettung, dann erhält man die Abbildung $g(f(x, y))$ mit der Matrix.

$$A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sin(\varphi) + \cos(\varphi) & a \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Diese beiden Verkettungen haben geometrisch keinen extra Namen. An diesem Beispiel sieht man jedoch deutlich, dass es in der Verkettung wichtig ist, in welcher Reihenfolge man die beiden Abbildungen verknüpft, denn die beiden Ergebnismatrizen sind unterschiedlich. Ausnahmen bilden nur die folgenden Fälle:

1. $a = 0$, dann ist aber $g(x, y) = (x, y)$ und hat keine Auswirkung. Daher geben beide Verkettungen $f(x, y)$.
2. $\alpha = 0$, dann ist aber $f(x, y) = (x, y)$ und hat keine Auswirkung. Daher geben beide Verkettungen $g(x, y)$.
3. $\alpha = 180^\circ$, dann ist $f(g(x, y)) = g(f(x, y))$ mit Matrix $\begin{pmatrix} -1 & -a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 5 (Die Verkettung von Scherung mit unterschiedlichen Scherachsen).

Eine Scherung $f(x, y) = \begin{pmatrix} x+ay \\ y \end{pmatrix}$ mit x -Achse und $g(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y+bx \end{pmatrix}$ mit y -Achse als Scherachse lassen sich mit Hilfe der Matrizen $A_f = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ beschreiben. Die Verkettung $f(g(x, y))$ besitzt die Matrix

$$A_f \cdot A_g = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

und die Verkettung $g(f(x, y))$ die Matrix

$$A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1+ab \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Diese Verkettungen haben geometrisch ebenfalls keinen eigenen Namen.

Die Abbildungen $f(g(x, y))$ und $g(f(x, y))$ sind nur dann gleich, wenn $ab = 0$ ist, also wenn $a = 0$ oder $b = 0$ ist. Dann ist aber die mit Parameter Null die identische Abbildung und hat keine Auswirkung in der Verkettung.

3 Die Umkehrabbildung und die inverse Matrix

Zu einer linearen Abbildung $f(x, y)$ mit Matrix $A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kann man unter Umständen eine lineare Abbildung $g(x, y)$ finden, sodass die Verkettung der beiden Abbildungen die identische Abbildung gibt, also die Abbildung, die jeden Punkt auf sich selbst abbildet²: $f(g(x, y)) = g(f(x, y)) = (x, y)$.

Wenn es zu einer Abbildung $f(x, y)$ eine Abbildung $g(x, y)$ gibt mit $f(g(x, y)) = g(f(x, y)) = (x, y)$, dann nennt man $g(x, y)$ die **Umkehrabbildung** zu $f(x, y)$.

Man schreibt auch $f^{-1}(x, y)$ für diese Umkehrabbildung von $f(x, y)$.

Wenn wir uns zurückerinnern, dass die identische Abbildung zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gehört, dann entspricht die Suche nach einer Umkehrabbildung $f^{-1}(x, y)$ von $f(x, y)$ die Suche nach einer Matrix $\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}$ mit

$$A \cdot \hat{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das gibt dann

$$\begin{pmatrix} a\hat{a} + b\hat{c} & a\hat{b} + b\hat{d} \\ c\hat{a} + d\hat{c} & c\hat{b} + d\hat{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} a\hat{a} + b\hat{c} = 1 \\ c\hat{a} + d\hat{c} = 0 \\ a\hat{b} + b\hat{d} = 0 \\ c\hat{b} + d\hat{d} = 1 \end{cases}$$

Wenn $f(x, y)$ gegeben ist, dann ist das ein 4×4 -LGS für die vier Parameter $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ und $\hat{d}$.³

Nun kann man mit den üblichen Methoden starten, um die Lösungen zu berechnen und bekommt

$$\hat{a} = \frac{d}{ad - bc}, \quad \hat{b} = \frac{-b}{ad - bc}, \quad \hat{c} = \frac{-c}{ad - bc} \quad \text{und} \quad \hat{d} = \frac{a}{ad - bc}$$

Man erhält also die Matrix der Umkehrabbildung aus der Matrix der vorgegebenen Abbildung durch folgende Schritte:

Schritt 1 Die Diagonaleinträge werden getauscht und die Nebendiagonaleinträge bleiben, ändern aber ihr Vorzeichen.

²Aus der Analysis kennt man das als Umkehrfunktion. So ist etwa $g(x) = \sqrt[3]{x}$ die Umkehrfunktion zu $f(x) = x^3$, denn $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. Ein anders Beispiel sind $f(x) = e^x$ und $g(x) = \ln(x)$ mit $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

³Dieses LGS ist sogar entkoppelt, d. h. die ersten beiden Gleichungen bzw. die beiden letzten Gleichungen liefern je ein 2×2 -LGS für die Parameter $\hat{a}$ und $\hat{c}$ bzw. $\hat{b}$ und $\hat{d}$.

Schritt 2 Alle Elemente der Matrix werden durch $ad - bc$ geteilt.

Fakten 6. 1. Eine lineare Abbildung besitzt nur dann eine Umkehrabbildung, wenn $ad - bc \neq 0$.

Wenn es zu einer Matrix A eine Matrix $\hat{A}$ gibt mit $A \cdot \hat{A} = \hat{A} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dann nennt man $\hat{A}$ die **inverse Matrix** zu A .
Man schreibt auch A^{-1} für diese inverse Matrix von A .

2. Eine lineare Abbildung $f(x, y)$ mit Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $ad - bc \neq 0$ besitzt eine Umkehrabbildung. Zu dieser gehört dann die inverse Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 7. 1. Für die Schermatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $ad - bc = 1$ und daher

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

” A schert hin und A^{-1} schert zurück”

2. Für die Streckmatrix $A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ ist $ad - bc = s^2$ und daher $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$.

” A streckt und A^{-1} staucht”

3. Für die Rotationsmatrix $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ist $ad - bc = 1$ und daher

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

” A dreht vorwärts und A^{-1} dreht rückwärts”

4 Matrizen und affine Abbildungen

Wir haben affine Abbildungen als Kombination einer linearen Abbildung und einer Verschiebung kennengelernt. In Matrixschreibweise ist die **allgemeine Darstellung** einer affinen Abbildung

$$f(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

In dieser Form ist $f(x, y)$ die Verkettung der linearen Abbildung $g(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und der Verschiebung $h(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, also $f(x, y) = h(g(x, y))$.

Unsere wichtigsten Beispiele affiner Abbildungen waren die Rotation um einen beliebigen Punkt $M = (m_1, m_2)$ und die Scherung mit einer Scherachse durch den Punkt M parallel zur x -Achse. Diese hatten die Form

$$f(x, y) = A \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}. \quad (**)$$

Diese Darstellung verfolgt eine geometrische Idee: Verschiebe den Drehpunkt bzw. die Scherachse nach $(0, 0)$ bzw. in die x -Achse, drehe bzw. schere dann und verschiebe anschließend wieder zurück.

In dieser Darstellung gilt immer $f(m_1, m_2) = (m_1, m_2)$, sodass $M = (m_1, m_2)$ ein **Fixpunkt** der Abbildung $f(x, y)$ ist. Deshalb nennt man die Darstellung **(**)** auch **Fixpunktdarstellung** der affinen Abbildung.

Die allgemeine Darstellung **(*)** und die Fixpunktdarstellung **(**)** hängen direkt zusammen:

1. Indem man die Fixpunktdarstellung "ausrechnet" bekommt man direkt

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}. \quad (\Delta)$$

Das klappt immer!

2. Umgekehrt erhält man den Fixpunkt (m_1, m_2) aus $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, wenn man die Gleichung **(Δ)** nach (m_1, m_2) auflösen kann. Das klappt aber nicht immer!

In kompakter Matrixform schreibt man die Gleichung **(Δ)** als

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 - (am_1 + bm_2) \\ m_2 - (cm_1 + dm_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & 1-d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \quad (\Delta')$$

und in Koordinatenform als

$$\begin{aligned} (1-a)m_1 - bm_2 &= b_1 \\ -cm_1 + (1-d)m_2 &= b_2 \end{aligned} \quad (\Delta'')$$

- Zur Bestimmung von (m_1, m_2) ist das Lösen des LGS **(Δ'')** meist die einfachste Variante.

- Möchte man für viele unterschiedliche $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ die Lösungen (m_1, m_2) bestimmen, kann es ggf. sinnvoll sein, die Matrixgleichung (Δ') zu verwenden. Ist nämlich $(1-a)(1-d) - (-b)(-c) = 1-a-d+ad-bc \neq 0$, dann gibt es die inverse Matrix

$$\begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & 1-d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-d}{1-a-d+ad-bc} & \frac{b}{1-a-d+ad-bc} \\ \frac{c}{1-a-d+ad-bc} & \frac{1-d}{1-a-d+ad-bc} \end{pmatrix}$$

Mit dieser bekommt man aus (Δ') :

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & 1-d \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & 1-d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & 1-d \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Damit kann man (m_1, m_2) dann direkt ausrechnen:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-d}{1-a-d+ad-bc} & \frac{b}{1-a-d+ad-bc} \\ \frac{c}{1-a-d+ad-bc} & \frac{1-d}{1-a-d+ad-bc} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (\Delta''')$$

Beispiel 8. 1. Drehung:

Wenn eine Drehung um einen Mittelpunkt M mit Winkel φ in der allgemeinen Form gegeben ist, dann kann man den Drehpunkt nicht so einfach ablesen. Gegeben ist hier die Drehung mit $\varphi = 70^\circ$, sodass $\cos(\varphi) \approx 0,342$ und $\sin(\varphi) \approx 0,940$:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 0,342 & -0,940 \\ 0,940 & 0,342 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Um den Mittelpunkt $M = (m_1, m_2)$ zu berechnen, nutzen wir die Formel (Δ''') .

Wegen $ad - bc = 1$ ist zunächst $1 - a - d + ad - bc = 2 - \cos(\varphi) - \sin(\varphi)$ und mit $\varphi = 70^\circ$

$$1 - a - d + ad - bc \approx 2 - 2 \cdot 0,342 = 1,316.$$

Damit ist dann wegen (Δ''')

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{1-0,342}{1,316} & -\frac{0,940}{1,316} \\ \frac{0,940}{1,316} & \frac{1-0,342}{1,316} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,500 & -0,714 \\ 0,714 & 0,500 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,528 \\ 4,712 \end{pmatrix}$$

also $M = (5,528/4,712)$

Bemerkung: Dass in der letzten Matrix die Diagonalelemente genau 0,5 sind, ist kein Zufall. Wenn man die Rechnungen für einen allgemeinen Winkel φ durchführt, dann ist im Fall der Drehung

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & \cot(0,5\varphi) \\ \cot(0,5\varphi) & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

2. Streckung:

Den Mittelpunkt einer allgemeinen Streckung kann man auch mit Hilfe von (Δ''') bestimmen. Das machen wir für den allgemeinen Fall und nutzen die Streckmatrix $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$.

Damit ist $1 - a - d + ad - bc = 1 - 2s + s^2 = (1 - s)^2$ und wegen (Δ''')

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-s}{(1-s)^2} & \frac{0}{(1-s)^2} \\ \frac{0}{(1-s)^2} & \frac{1-s}{(1-s)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

also $M = (m_1, m_2) = \left(\frac{b_1}{1-s}, \frac{b_2}{1-s}\right)$.

Bemerkung: Diesen Mittelpunkt kann man nur berechnen, wenn $s \neq 1$ ist. Im Fall $s = 1$ ist $f(x, y) = (x + b_1, y + b_2)$ eine gewöhnliche Verschiebung und diese besitzt keinen Fixpunkt.⁴

3. Scherung:

Auch hier sehen wir uns den allgemeinen Fall mit der Schermatrix $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ an.

Wegen $1 - a - d + ad - bc = 0$ kann man (Δ''') nicht anwenden und wir nutzen (Δ'') . Hier erhält man einen Punkt $M = (m_1, m_2)$ aus dem Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (1-a)m_1 & -bm_2 & = b_1 \\ -cm_1 + (1-d)m_2 & = b_2 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} -sm_2 & = b_1 \\ 0 & = b_2 \end{array} \right\}$$

Man bekommt eine Fixpunktgleichung der allgemeinen Scherung also nur, wenn $b_2 = 0$ ist.

In diesem Fall ist $M = (m_1, m_2) = \left(0, -\frac{b_1}{s}\right)$ ein Fixpunkt, aber auch jeder andere Punkt $\left(m_1, -\frac{b_1}{s}\right)$.

⁴Außer wenn (b_1, b_2) der Nullpunkt ist: dann sind alle Punkte Fixpunkte.