Frank Klinker

Grundlagen: Lineare Gleichungen: Gestalt und Lösungen

1 Eine kurze Wiederholung

1.1 Gleichungen

- Eine allgemeine **Gleichung** erhalten wir, indem wir zwei **Terme gleichsetzen**.
- Eine Gleichung können wir daraufhin überprüfen, ob sie **wahr** oder **falsch** ist.
- Enthält eine Gleichung Variablen, dann ist eine Gleichung in der Regel nur für spezielle Werte der Variablen wahr.

  In Ausnahmefällen kann sie jedoch auch für alle Werte oder für keine Werte der Variablen wahr sein.
- Die Werte der Variablen, für die eine Gleichung wahr ist, nennen wir dann **die Lösungen der Gleichung**.

  Alle Lösungen einer Gleichung gemeinsam bilden die **Lösungsmenge**, die wir mit $\mathbb{L}$ bezeichnen.

1.2 Lösungen und Lösungsmenge

- Wir haben bereits früher gesehen, dass es in der Regel nicht so einfach ist, die Lösungen einer Gleichung zu 'sehen'.
- Durch 'Ausprobieren' finden wir in manchen Fällen Lösungen. Dabei bleibt jedoch meist die Frage offen, ob es noch weitere Lösungen gibt!
- Das Ziel ist es daher, eine Gleichung so zu manipulieren bzw. umzuformen, dass wir aus der manipulierten Gleichung die Lösungen leichter ablesen können.
- Dabei müssen wir darauf achten, dass wir bei der durchgeführten Umformung keine Lösungen der Ausgangsgleichung verlieren oder neue Lösungen dazubekommen.
- Manipulationen/Umformungen, die die Lösungsmenge nicht ändern, heißen auch **Äquivalenzumformungen**.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

2 Lineare Gleichungen

2.1 Die Form einer linearen Gleichung

- Eine **lineare Gleichung** ist eine Gleichung mit nur einer Variablen, üblicherweise x, wobei die Variable höchstens mit der Potenz 1 vorkommen darf.
- Lineare Gleichungen lassen sich durch die weiter unten vorgestellten Manipulationen und Umformungen immer auf die Gestalt

$$A \cdot x = B$$

bringen, wobei A und B beliebige feste Werte sind.

Beispiel 1.

- $4x = 2$ ist eine lineare Gleichung.
- $4x - 2 = 8$ ist eine lineare Gleichung.
- $4x - 2 = 8x + 2$ ist eine lineare Gleichung.
- $x^2 - 4x + 1 = 0$ ist <u>keine</u> lineare Gleichung, da x in der Potenz 2 vorkommt.
- $x^2 + 4x - 2 = x(x - 2)$ ist eine lineare Gleichung, obwohl zunächst x in der Potenz 2 vorkommt.
- $x^2(x - x^2) + 4 + 2x^3 - x = 3x^3 - 3x - x^4 + 8$ ist eine lineare Gleichung.
- $x^2(x + x^2) + 4 + 2x^3 - x = 3x^3 - 3x - x^4 + 8$ ist <u>keine</u> lineare Gleichung.
- $0 = 7$ ist eine lineare Gleichung
- $0 = 0$ ist eine lineare Gleichung

Achtung: Die beiden letzten Beispiele sind sehr speziell. In diesen Fällen ist nämlich der Wert $A = 0$, sodass gar kein x mehr in der Gleichung vorkommt.

Hinweis:

Ob eine Gleichung linear ist, kann man ihr oft erst ansehen, wenn man sie auf die oben beschriebene Form $A \cdot x = B$ gebracht hat.

2.2 Entscheiden, ob eine Gleichung linear ist

Bemerkung:

Um eine Gleichung in die Form $Ax = B$ zu bringen und gegebenenfalls ihre Lösungen zu bestimmen, geht man in der Regel in drei Hauptschritten vor:

Schritt 1: Vereinfache beide Seiten der Gleichung unabhängig voneinander

Schritt 2: Sortiere alle Terme, die x enthalten auf die eine Seite des Gleichzeichens und alle, die kein x enthalten auf die andere.

Schritt 3: Prüfe, ob es sich um eine lineare Gleichung handelt. Wenn 'ja', dann bestimme die Lösungsmenge

Wir werden zunächst Schritt 1 und Schritt 2 an drei Beispielen sehr ausführlich durchführen.

Das hilft uns, zu entscheiden, ob die betrachtete Gleichung linear ist.

Beispiel 2. a) $\boxed{x^2(x - x^2) + 4 + 2x^2 - x = 3x^3 - 3x - x^4 + 8}$

Schritt 1: Auf der rechten Seite der Gleichung können wir nichts vereinfachen, aber auf der linken:[1]

$$\begin{aligned}
& & x^2(x - x^2) + 4 + 2x^3 - x &= 3x^3 - 3x - x^4 + 8 \quad | \text{ Klammer auflösen} \\
&\iff & x^2 \cdot x - x^2 \cdot x^2 + 4 + 2x^2 - x &= 3x^3 - 3x - x^4 + 8 \\
&\iff & x^3 - x^4 + 4 + 2x^3 - x &= 3x^3 - 3x - x^4 + 8 \quad | \text{ zusammenfassen} \\
&\iff & 3x^3 - x^4 + 4 - x &= 3x^3 - 3x - x^4 + 8
\end{aligned}$$

Schritt 2: Jetzt wird sortiert. In diesem Fall bringen wir alles, was x dabei hat, auf die linke Seite des Gleichzeichens und alles, was kein x dabei hat, auf die rechte.

> **Erlaubte Umformungen in Schritt 2**
>
> Wir dürfen auf beiden Seiten des Gleichzeichens geschickt die selben Terme addieren oder subtrahieren.
>
> Wie auf einer Waage, auf der man auf beiden Seiten gleichzeitig etwas hinzufügt oder wegnimmt, ändert sich dadurch die Gleichheit nicht!
>
> Diese Umformungen sind erlaubt, weil alle Lösungen der neuen Gleichung auch Lösung der alten Gleichung sind und alle Werte, die keine Lösung der neuen Gleichung sind, auch keine Lösung der alten Gleichung sind.

[1]Wir benutzen das Zeichen $\iff$ um deutlich zu machen, dass wir die alte Gleichung nur umgeformt haben.

Das, was wir auf beiden Seiten addieren oder abziehen wollen, schreiben wir hinter einen Strich an der Rand der Gleichung

Bisher hatten wir:

$$\begin{aligned} & x^2(x-x^2)+4+2x^3-x = 3x^3-3x-x^4+8 \\ \iff \quad & 3x^3-x^4+4-x = 3x^3-3x-x^4+8 \end{aligned}$$

Weiter geht's:

$$\begin{aligned} \iff \quad & 3x^3-x^4+4-x = 3x^3-3x-x^4+8 && \mid -3x^3 \\ \iff \quad & 3x^3-x^4+4-x-3x^3 = 3x^3-3x-x^4+8-3x^3 \\ \iff \quad & -x^4+4-x = -3x-x^4+8 && \mid +x^4 \\ \iff \quad & -x^4+4-x+x^4 = -3x-x^4+8+x^4 \\ \iff \quad & 4-x = -3x+8 && \mid +3x \\ \iff \quad & 4-x+3x = -3x+8+3x \\ \iff \quad & 4+2x = 8 && \mid -4 \\ \iff \quad & 4+2x-4 = 8-4 \\ \iff \quad & 2x = 4 \end{aligned}$$

Das heißt, wir haben die Ausgangsgleichung wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned} & x^2(x-x^2)+4+2x^3-x = 3x^3-3x-x^4+8 \\ \iff \quad & 2x = 4 \end{aligned}$$

Damit ist $x^2(x-x^2)+4+2x^2-x = 3x^3-3x-x^4+8$ tatsächlich eine lineare Gleichung: es ist $A=2$ und $B=4$!

b) $\boxed{x(x-1)+x(x+2) = 3(x^2-x)+1}$

Schritt 1: Wir können beide Seiten der Gleichung vereinfachen, indem wir die Klammern auflösen und zusammenfassen:

$$\begin{aligned} & x(x-1)+x(x+2) = 3(x^2-x)+1 && \mid \text{Klammer auflösen} \\ \iff \quad & x^2-x+x^2+2x = 3x^2-3x+1 && \mid \text{zusammenfassen} \\ \iff \quad & 2x^2+2x = 3x^2-3x+1 \end{aligned}$$

Schritt 2: Das Sortieren startet. Wieder bringen wir alles, was x dabei hat, auf die linke Seite des Gleichzeichens und alles, was kein x dabei hat, auf die rechte.

Weiter geht's

$$\begin{aligned} \iff \quad & 2x^2+2x = 3x^2-3x+1 && \mid -3x^2 \\ \iff \quad & 2x^2+2x-3x^2 = 3x^2-3x+1-3x^2 \\ \iff \quad & -x^2+2x = -3x+1 && \mid +3x \\ \iff \quad & -x^2+2x+3x = -3x+1+3x \\ \iff \quad & -x^2+5x = 1 \end{aligned}$$

Wir haben also insgesamt

$$
\begin{aligned}
& x(x-1)+x(x+2)=3(x^2-x)+1 \\
\iff \quad & -x^2+4x=1\,.
\end{aligned}
$$

Damit handelt es sich bei Beispiel b) <u>nicht</u> um eine lineare Gleichung, da noch Terme mit x^2 vorkommen, die sich nicht entfernen lassen.

c) $\boxed{(x-1)(x+1)-4x=4(1-x)}$

<u>Schritt 1:</u> Wieder vereinfachen wir beide Seiten der Gleichung.

$$
\begin{aligned}
& (x-1)(x+1)-4x=4(1-x)+x^2 && \mid \text{Klammer auflösen} \\
\iff \quad & x^2+x-x-1-4x=4-4x+x^2 && \mid \text{zusammenfassen} \\
\iff \quad & x^2-1-4x=4-4x+x^2
\end{aligned}
$$

<u>Schritt 2:</u> Wieder wird sortiert und wir bringen alles, was x dabei hat, auf die linke Seite des Gleichzeichens und alles, was kein x dabei hat, auf die rechte.

Weiter geht's

$$
\begin{aligned}
\iff \quad & x^2-1-4x=4-4x+x^2 && \mid -x^2 \\
\iff \quad & x^2-1-4x-x^2=4-4x+x^2-x^2 \\
\iff \quad & -1-4x=4-4x && \mid +4x \\
\iff \quad & -1-4x+4x=4-4x+4x \\
\iff \quad & -1=4 && \mid +1 \\
\iff \quad & -1+1=4+1 \\
\iff \quad & 0=5
\end{aligned}
$$

Wir haben also insgesamt

$$
\begin{aligned}
& (x-1)(x+1)-4x=4(1-x)+x^2 \\
\iff \quad & 0=5\,.
\end{aligned}
$$

Bei c) handelt sich um eine lineare Gleichung mit $A=0$ und $B=5$.

3 Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung

Nun wenden wir uns dem Lösen einer linearen Gleichung zu, also der Bearbeitung des obigen Schritt 3.

Dazu erledigen wir zunächst Schritt 1 und Schritt 2, sodass wir die Gleichung bereits in die Form $A \cdot x = B$ überführt haben.

Jetzt können wir die Lösung sehr schnell bestimmen. Dazu müssen wir allerdings drei Fälle unterscheiden:

Fall I: A ist nicht Null. Das ist der typische Fall! Z. B.

$$2x = 3{,}5 \quad \text{oder} \quad \tfrac{3}{4}x = 0$$

Fall II: A und B sind beide Null. Das ist also nur die Gleichung

$$0 = 0 \quad (\text{genauer: } 0x = 0)$$

Fall III: A ist Null, aber B nicht, z. B.

$$0 = 2 \quad \text{oder} \quad 0 = \tfrac{1}{4} \quad (\text{genauer: } 0x = 2 \quad \text{oder} \quad 0x = \tfrac{1}{4})$$

3.1 Fall I

Hier erhalten wir die Lösung der Gleichung, indem wir noch einen weiteren Umformungsschritt machen.

Wir starten mit zwei Beispielen:

- Aus der linearen Gleichung
$$x = 120$$
können wir die Lösung direkt ablesen: sie steht ja bereits da, nämlich $x = 120$.
Damit besteht die Lösungsmenge auch lediglich aus diesem einen Wert:
$$\mathbb{L} = \{120\}.$$

- Wir bringen die Gleichung
$$7x = 105$$
durch eine geschickte Umformung in die Form des ersten Beispiels. Dazu stört allerdings die 7 auf der linken Seite.

> **Erlaubte Umformung in Schritt 3**
>
> Wir dürfen beide Seiten der Gleichung mit einer Zahl ungleich Null multiplizieren oder durch eine Zahl ungleich Null teilen.
>
> Wie bei einer Waage, bei der man beide Seiten um die gleiche Zahl vervielfacht oder teilt, ändert sich dadurch die Gleichheit nicht.
>
> Auch diese Umformungen sind erlaubt, weil alle Lösungen der neuen Gleichung auch Lösung der alten Gleichung sind und alle Werte, die keine Lösung der neuen Gleichung sind, auch keine Lösung der alten Gleichung sind.

In unserem Beispiel steht auf der linken Seite $7x$. Um hier nur noch x zu haben, können wir die linke Seite durch 7 teilen. Um die Gleichheit – wie das Gleichgewicht bei einer Waage – zu erhalten, müssen wir das selbe auch auf der rechten

Seite machen:

$$\begin{aligned} 7x &= 105 \qquad |:7 \\ \iff \quad 7x : 7 &= 105 : 7 \\ \iff \quad x &= 15 \end{aligned}$$

Nun können wir die Lösungsmenge direkt ablesen und sie besteht wieder aus nur einem Wert:

$$\mathbb{L} = \{15\}.$$

In Fall I, also $A \neq 0$, besteht die Lösungsmenge der linearen Gleichung $Ax = B$ aus genau einem Wert, nämlich

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{B}{A} \right\}.$$

Beispiel 3.

- $$\begin{aligned} 3x &= 1200 \quad |:3 \\ \iff \quad x &= 400 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 0{,}5x &= 70 \quad |:0{,}5 \\ \iff \quad x &= 140 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}x &= \tfrac{4}{3} \quad |:\tfrac{3}{2} \\ \iff \quad x &= \tfrac{8}{9} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 9x &= 4 \quad |:9 \\ \iff \quad x &= \tfrac{4}{9} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 7x &= 400 \quad |:3 \\ \iff \quad x &= \frac{400}{7} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 17x &= 170 \quad |:17 \\ \iff \quad x &= 10 \end{aligned}$$

3.2 Fälle II und III

Die beiden Fälle sehen ähnlich aus, nur dass in Fall II auf der rechten Seite eine Null steht und in Fall III nicht.

In beiden Fällen tritt in der Gleichung jedoch kein x auf. Damit hängt die Entscheidung, ob die Gleichung wahr oder falsch ist, gar nicht von dem gewählten Wert für die Variable x ab.

▷ In Fall II haben wir

$$0 = 0 \quad \text{(genauer: } 0x = 0\text{)}$$

und das ist stets wahr, egal welchen Wert für x wir wählen. Also besteht die Lösungsmenge aus allen Werten. Wir schreiben dann $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$.

▷ In Fall III haben wir z. B.

$$0 = 73 \quad \text{(genauer: } 0x = 73\text{)}$$

und das ist stets falsch, egal welchen Wert für x wir wählen. Also gibt es keine Lösung und die Lösungsmenge ist leer. Wir schreiben dann $\mathbb{L} = \emptyset$.

In Fall II, also $A = 0$ und $B = 0$, besteht die Lösungsmenge der linearen Gleichung $0x = 0$ aus allen Werten, also

$$\mathbb{L} = \mathbb{Q}\,.$$

In Fall II, also $A = 0$ und $B \neq 0$, ist die Lösungsmenge der linearen Gleichung $0x = B$ leer, also

$$\mathbb{L} = \emptyset\,.$$

Beispiel 4. Wir sehen uns die zwei linearen Beispiele a) und c) aus Beispiel 2 noch einmal an:

a) Die Gleichung $x^2(x - x^2) + 4 + 2x^2 - x = 3x^3 - 3x - x^4 + 8$ ist linear, denn

$$\begin{aligned} & & x^2(x - x^2) + 4 + 2x^2 - x &= 3x^3 - 3x - x^4 + 8 & \\ &\Longleftrightarrow & 2x &= 4 & \mid : 2 \\ &\Longleftrightarrow & x &= 2 & \end{aligned}$$

Sie hat die Lösung $x = 2$ (Fall I).

c) Die Gleichung $(x - 1)(x + 1) - 4x = 4(1 - x)$ ist linear, denn

$$\begin{aligned} & & (x-1)(x+1) - 4x &= 4(1 - x) \\ &\Longleftrightarrow & 0 &= 5 \end{aligned}$$

Sie hat jedoch keine Lösung (Fall III).