Frank Klinker

Elementare Steckbriefaufgaben

Lineare und quadratische Funktionen

1 Was ist eine Steckbriefaufgabe?

> Unter einer **Steckbriefaufgabe** versteht man eine Aufgabe, bei der man die spezielle Gestalt einer Funktion herleiten soll.
>
> Dazu sind mehrere, in einem Text codierte Informationen zu verwenden.
>
> Die erhaltene Funktion muss dann alle im Text beschriebenen Eigenschaften erfüllen.

2 Lineare Funktionen/Geraden

Wir beginnen mit typischen Steckbriefaufgaben im Zusammenhang mit linearen Funktionen. Diese haben wir bereits bei der Diskussion linearer Funktionen kennen gelernt und sammeln sie hier nur nochmal zusammen.

Aufgabe 1 (Grundaufgaben zur Bestimmung von Geraden)**.**

G1) Gegeben sind die Punkte $A(x_A/y_A)$ und $B(x_B/y_B)$. Bestimmen Sie eine Gerade, die durch beide Punkte verläuft.

G2) Gegeben ist der Punkt $P(x_P/y_P)$ und die Zahl m. Bestimmen Sie eine Gerade, die durch P verläuft und m als Steigung besitzt.

Es gibt Aufgaben, die sich auf die Grundaufgaben G1 und G2 zurückführen.[1] Diese lassen sich oftmals einfacher bzw. direkter lösen als die jeweilige allgemeine Aufgabe.

Aufgabe 2.

G1a) Gegeben sind der Punkt $P(x_P/y_P)$ und der Wert $y = b$. Bestimmen Sie eine Gerade, die durch P verläuft und in dem vorgegebenen Wert die y-Achse schneidet (oder: und den y-Achsenabschnitt b hat).

G1b) Gegeben sind der Punkt $P(x_P/y_P)$ und der Wert $x = x_1$. Bestimmen Sie eine Gerade, die durch P verläuft und in dem vorgegebenen Wert die x-Achse schneidet (oder: und in x_1 eine Nullstelle hat).

G2a) Gegeben sind die Zahl m und der Wert $y = b$. Bestimmen Sie eine Gerade, die die Steigung m hat und y-Achse in b schneidet (oder: und den y-Achsenabschnitt b hat).

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: June 5, 2024

[1] Die Unternummern geben jeweils Spezialfälle der Hauptnummer an.

G2b) Gegeben sind die Zahl m und der Wert $x = x_1$. Bestimmen Sie eine Gerade, die die Steigung m hat und die x-Achse in x_1 schneidet (oder: und in x_1 eine Nullstelle hat).

Jetzt folgen noch zwei Aufgabentypen, die die Lagebeziehung zwischen Geraden ausnutzen, d. h. ob sie parallel oder senkrecht zueinander sind:

Aufgabe 3.

G3) Gegeben sind die lineare Funktion $f(x) = mx + b$ und der Punkt $P(x_P/y_P)$. Bestimmen Sie eine Gerade, die parallel zu $f(x)$ ist und durch P verläuft.

G4) Gegeben sind die lineare Funktion $f(x) = mx + b$ und der Punkt $P(x_P/y_P)$. Bestimmen Sie eine Gerade, die durch P verläuft und zu $f(x)$ senkrecht ist.

Auch hier gibt es Weitere verwandte Aufgaben:

Aufgabe 4.

G3a) Gegeben sind die lineare Funktion $f(x) = mx + b$ und der Wert $y = d$. Bestimmen Sie eine Gerade, die parallel zu $f(x)$ ist und die y-Achse in dem vorgegebenen Wert schneidet (oder: und den y-Achsenabschnitt d hat).

G3b) Gegeben sind die lineare Funktion $f(x) = mx + b$ und der Wert $x = x_1$. Bestimmen Sie eine Gerade, die parallel zu $f(x)$ ist und die x-Achse im vorgegebenen Wert schneidet (oder: und in x_1 eine Nullstelle hat).

G4a) Gegeben sind die lineare Funktion $f(x) = mx + b$ und der Wert $y = d$. Bestimmen Sie eine Gerade, die senkrecht zu $f(x)$ ist und die y-Achse in d schneidet (oder: und den y-Achsenabschnitt d hat).

G4b) Gegeben sind die lineare Funktion $f(x) = mx + b$ und der Wert $x = x_1$. Bestimmen Sie eine Gerade, die senkrecht zu $f(x)$ ist und die x-Achse in x_1 schneidet (oder: und in x_1 eine Nullstelle hat).

3 Quadratische Funktionen/Parabeln

Wie bei den Geraden gibt es auch bei den Parabeln einige grundlegende Steckbriefaufgaben:

Aufgabe 5 (Grundaufgaben zur Bestimmung von Parabeln)**.**

P1) Gegeben sind der Punkt $S(x_S/y_S)$ und die Zahl $a \neq 0$. Bestimmen Sie eine Parabel, die S als Scheitelpunkt und a als Öffnung besitzt.

P2) Gegeben sind der Punkt $S(x_S/y_S)$ und der Punkt $P(x_P/y_P)$. Bestimmen Sie eine Parabel, die S als Scheitelpunkt besitzt und durch P verläuft.

P3) Gegeben sind die Zahl $a \neq 0$ und die Punkte $P(x_P/y_P)$ und $Q(x_Q/y_Q)$. Bestimmen Sie eine Parabel, die die Öffnung a hat und durch die Punkte P und Q verläuft.

P4) Gegeben sind die drei Punkte $P(x_P/y_P)$, $Q(x_Q/y_Q)$ und $R(x_R/y_R)$. Bestimmen Sie eine Parabel, die durch die Punkte P, Q und R verläuft.

Die oftmals einfacher bzw. direkter zu lösenden Spezialfälle sind hier:

Aufgabe 6.

P2a) Gegeben sind der Punkt $S(x_S/y_S)$ und der Wert $x = x_1$. Bestimmen Sie eine Parabel, die S als Scheitelpunkt hat, und in dem vorgegebenen Wert die x-Achse schneidet.

P2b) Gegeben sind der Punkt $S(x_S/y_S)$ und der Wert $y = c$. Bestimmen Sie eine Parabel, die S als Scheitelpunkt hat, und in dem vorgegebenen Wert die y-Achse schneidet.

P3a) Gegeben sind die Zahl a und die Werte $x = x_1$ und $x = x_2$. Bestimmen Sie eine Parabel, die die Öffnung a hat und die x-Achse in den vorgegebenen Werten schneidet.

P3b) Gegeben sind die Zahl a und die Werte $x = x_1$ und $y = c$. Bestimmen Sie eine Parabel, die die Öffnung a hat, die x- bzw y-Achse in den vorgegebenen Werten schneidet.

P3c) Gegeben sind die Zahl a, der Punkt $P(x_P/y_P)$ und der Wert $x = x_1$. Bestimmen Sie eine Parabel, die die Öffnung a, die x-Achse in den vorgegebenen Wert schneidet, und den Punkt P enthält.

P3d) Gegeben sind die Zahl a, der Punkt $P(x_P/y_P)$ und der Wert $y = c$. Bestimmen Sie eine Parabel, die die Öffnung a, die y-Achse in den vorgegebenen Wert schneidet, und durch den Punkt P verläuft.

P4a) Gegeben sind die zwei Punkte $P(x_P/y_P)$, $Q(x_Q/y_Q)$ und der Wert $x = x_1$. Bestimmen Sie eine Parabel, die durch die Punkte P und Q verläuft und die x-Achse im vorgegebenen Wert schneidet.

P4b) Gegeben sind die zwei Punkte $P(x_P/y_P)$, $Q(x_Q/y_Q)$ und der Wert $y = c$. Bestimmen Sie eine Parabel, die durch die Punkte P und Q verläuft und die y-Achse im vorgegebenen Wert schneidet.

P4c) Gegeben sind der Punkt $P(x_P/y_P)$ und die Werte $x = x_1$ und $y = c$. Bestimmen Sie eine Parabel, die durch den Punkte P verläuft und die x- bzw. y-Achse in den vorgegebenen Werten schneidet.

P4d) Gegeben sind der Punkt $P(x_P/y_P)$ und die Werte $x = x_1$ und $x = x_2$. Bestimmen Sie eine Parabel, die durch den Punkte P verläuft und die x-Achse in den vorgegebenen Werten schneidet.

P4e) Gegeben sind die Werte $x = x_1$, $x = x_2$ und $y = c$. Bestimmen Sie eine Parabel, die die x-Achse in den zwei vorgegebenen x-Werten und die y-Achse in dem vorgegebenen y-Wert schneidet.

Bemerkung 7.

- Wenn man sich die Spezialfälle zu P4 ansieht, dann kann man zunächst den Fall dreier vorgegebener x-Werte vermissen. Das entspräche drei vorgegebenen Punkten $P(x_P/0)$ $Q(x_Q/0)$ und $R(x_R/0)$.

  Einerseits ist anschaulich klar, dass es keine Parabel mit drei Nullstellen geben kann.

  Andererseits kann man die Rechnungen analog zum Fall P4 durchführen und erhält als Normalform $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a = b = c = 0$.

  Das ist natürlich keine Parabel (da $a = 0$) sondern eine Gerade (nämlich die x-Achse).

- Im allgemeinen Fall P4 kann $a = 0$ also als Lösung auftreten. Das hängt von der Wahl der Punkte P, Q und R ab.

  Die Funktion, die man erhält, ist dann eine Gerade $f(x) = bx + c$ (die x-Achse ist ein Spezialfall)

- Das Kriterium, wann das passiert ist geometrisch leicht einzusehen:

  Immer dann, wenn die drei Punkte auf einer Geraden liegen, dann ist genau diese Gerade die Lösung, und es gibt keine Parabel.

- Überprüfen kann man das, indem man die Quotienten $m_{PQ} = \dfrac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$ und $m_{PR} = \dfrac{y_P - y_R}{x_P - x_R}$ berechnet:

  Sind die gleich, also $m_{PQ} = m_{PR}$, so liegen P, Q und R auf einer Geraden und es gibt keine Parabel durch P, Q und R.

4 Beispiele zu den Parabelaufgaben

Wir nutzen die Schreibweisen

$$\begin{array}{ll} \text{NF:} & f(x) = ax^2 + bx + c \\ \text{SPF:} & f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S \\ \text{NSTF:} & f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \end{array}$$

P1) $\underline{SP(-3/4),\ a = 4}$

Wir nutzen die SPF und setzen SP und a ein. Das liefert sofort die Lösung

$$\boxed{f(x) = 4(x - (-3))^2 + 4 = 4(x + 3)^2 + 4\,.}$$

P2) $\underline{SP(2/-3),\ Q(1/-4)}$

Wir nutzen die SPF und setzen SP ein:

$$f(x) = a(x - 2)^2 + (-3) = a(x - 2)^2 - 3\,.$$

Hier setzen wir nun Q ein:

$$\begin{array}{ll} -4 = a(1 - 2)^2 - 3 = a - 3 & \Big| + 3 \\ -1 = a & \end{array}$$

Das liefert schließlich

$$\boxed{f(x) = -(x - 2)^2 - 3\,.}$$

P3) $\underline{a = 2,\ P = (1/-2),\ Q = (2/8)}$

Wir nutzen die NF und setzen a ein:

$$f(x) = 2x^2 + bx + c$$

Dann setzen wir P und Q ein:

$$\begin{array}{rcll} -2 & = & 2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & \\ 8 & = & 2 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & \\ \hline -4 & = & b + c & \\ 0 & = & 2b + c & \\ \hline -4 & = & b + c & \\ 4 & = & b & (II - I) \\ \hline \multicolumn{4}{l}{b = 4} \\ \multicolumn{4}{l}{c = -4 - b = -8} \end{array}$$

Das gibt als Ergebnis

$$\boxed{f(x) = 2x^2 + 4x - 8\,.}$$

P4) $\underline{P(1/-2),\ Q(-1/2),\ R(2/4)}$

Wir nutzen die NF und setzen die drei Punkte ein:

$$\begin{array}{rcll}
-2 & = & a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c & \\
2 & = & a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c & \\
4 & = & a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c & \\
\hline
-2 & = & a+b+c & \\
2 & = & a-b+c & \\
4 & = & 4a+2b+c & \\
\hline
-2 & = & a+b+c & \\
4 & = & -2b & (II-I) \\
6 & = & 3a+b & (III-I) \\
\hline
\multicolumn{4}{l}{b=-2} \\
\multicolumn{4}{l}{3a = 6-b = 8 \quad \text{also} \quad a = \frac{8}{3}} \\
\multicolumn{4}{l}{c = -2-a-b = -\frac{8}{3}}
\end{array}$$

Zusammen liefert das die Lösung

$$\boxed{f(x) = \tfrac{8}{3}x^2 - 2x - \tfrac{8}{3}\,.}$$

P2a) $\underline{SP(2/4),\ x=1}$

Das lesen wir als $SP(2/4)$, $Q(1/0)$ und gehen wie in 2 vor. Die Lösung lautet

$$\boxed{f(x) = -4(x-2)^2 + 4\,.}$$

P2b) $\underline{SP(1/3),\ y=7}$

Das lesen wir als $SP(1/3)$, $Q(0/7)$ und gehen wie in 2 vor. Die Lösung lautet

$$\boxed{f(x) = 4(x-1)^2 + 3\,.}$$

P3a) $\underline{a=2,\ x=1 \text{ und } x=7}$

Da die zwei x-Werte die Nullstellen sein sollen, setzen wir alles in NSTF ein und erhalten die Lösung

$$\boxed{f(x) = 2(x-1)(x-7)\,.}$$

P3b) $\underline{a=-2,\ x=3,\ y=4}$

Wir bieten hier zwei Lösungsmöglichkeiten.

- Wir starten mit der NSTF und setzen a und x_1 ein

$$f(x) = -2(x-3)(x-x_2)\,.$$

Hier setzen wir nun den Punkt (0/4) ein:

$$4 = -2(0-3)(0-x_2) = -6x_2 \quad \text{also} \quad x_2 = -\tfrac{2}{3}\,.$$

Das gibt dann die Lösung

$$\boxed{f(x) = -2(x-3)\big(x+\tfrac{2}{3}\big)\,.}$$

- Alternativ starten wir mit der NF und setzen a und y sofort ein:

$$f(x) = -2x^2 + bx + 4\,.$$

Jetzt setzen wir (3/0) ein und erhalten

$$0 = -2\cdot 3^2 + b\cdot 3 + 4 = -14 + 3b \quad \text{also} \quad b = \tfrac{14}{3}$$

und schließlich die Lösung

$$\boxed{f(x) = -2x^2 + \tfrac{11}{3}x + 4\,.}$$

P3c) $\underline{a = 2,\ P(1/-4),\ x = -1}$

Wir nutzen die NSTF und setzen a und die Nullstelle $x = -1$ ein:

$$f(x) = 2(x+1)(x-x_2)\,.$$

Als letzten Schritt setzen wir hier P ein:

$$-4 = 2(1+1)(1-x_2) = 4 - 4x_2 \quad \text{also} \quad x_2 = 2\,.$$

Als Ergebnis haben wir damit

$$\boxed{f(x) = 2(x+1)(x-2)\,.}$$

P3d) $\underline{a = -1,\ P(1/3),\ y = 4}$

Wir nutzen die NF und setzen direkt a und den y-Achsenabschnitt ein:

$$-x^2 + bx + 4\,.$$

Den Punkt P hier einsetzen gibt

$$3 = -1^2 + b\cdot 1 + 4 = 3 + b \text{ also } \quad b = 0\,,$$

sodass

$$\boxed{f(x) = -x^2 + 4}$$

die gesuchte Parabel ist.

P4a) $\underline{P(-1/3),\ Q(3/6),\ x=1}$

- Wir können hier genauso vorgehen wie bei 4: dazu starten wir mit der NF und nutzen neben P und Q den Punkt $(1/0)$.

- An dieser Stelle starten wir jedoch mit der NSTF und setzen die Nullstelle ein:

$$f(x) = a(x-1)(x-x_2)\,.$$

Dort setzen wir nun P und Q ein und erhalten ein nichtlineares Gleichungssystem für a und x_2:

$$\begin{array}{rcll}
3 & = & a(-1-1)(-1-x_2) = 2a(1+x_2) & \big|\,:a \\
6 & = & a(3-1)(3-x_2) = 2a(3-x_2) & \big|\,:(2a) \\
\hline
\frac{3}{a} & = & 2+2x_2 & \\
\frac{3}{a} & = & 3-x_2 & \\
\hline
\end{array}$$

gleichsetzen gibt $2+2x_2 = 3-x_2$ also $3x_2 = 1$ also $x_2 = \frac{1}{3}$

x_2 einsetzen gibt $\frac{3}{a} = \frac{8}{3}$ also $a = \frac{9}{8}$

Zusammen erhalten wir die Parabel

$$\boxed{f(x) = \tfrac{9}{8}(x-1)\big(x-\tfrac{1}{3}\big)\,.}$$

P4b) $\underline{P(1/3),\ Q(-2/1),\ y=1}$

Die Rechnung ist im Wesentlichen die gleiche, wie bei 4, nur dass man ein kleiner LGS hat. Wir nutzen die NF und setzen direkt den y-Achsenabschnitt $c=1$ ein:

$$f(x) = ax^2 + bx + 1\,.$$

Hier geben wir nun die zwei Punkte ein:

$$\begin{array}{rcll}
3 & = & a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + 1 & \\
1 & = & a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + 1 & \\
\hline
2 & = & a+b & \\
0 & = & 4a-2b & \\
\hline
2 & = & a+b & \\
4 & = & 6a & (II + 2\cdot I) \\
\hline
\end{array}$$

$$a = \frac{2}{3}$$

$$b = 2 - a = \frac{4}{3}$$

Das liefert die Parabel

$$\boxed{f(x) = \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{4}{3}x + 1\,.}$$

P4c) $\underline{P(-1/-2),\ x=3,\ y=6}$

- Auch hier können wir genauso vorgehen, wie bei 4 und mit der NF starten: dazu nutzen wir neben P die Punkte (3/0) und (0/6).
- Besser könnten wir auch 4b nutzen: dort setzen wir direkt $c=6$ und neben P verwenden wir (3/0).
- An dieser Stelle starten wir jedoch wieder mit der NSTF und setzen die Nullstelle ein:

$$f(x) = a(x-3)(x-x_2)\,.$$

Anschließend werden P und (0/6) eingesetzt:

$$\begin{array}{rcll}
-2 & = & a(-1-3)(-1-x_2) & \\
6 & = & a(0-3)(0-x_2) & \\
\hline
-2 & = & = -4a(-1-x_2) & \big|\ :(-a) \\
6 & = & = 3ax_2 & \big|\ :(3a) \\
\hline
\frac{2}{a} & = & -4-4x_2 & \\
\frac{2}{a} & = & x_2 & \\
\hline
\multicolumn{4}{l}{\text{gleichsetzen gibt } \ -4-4x_2 = x_2 \ \text{ also } \ -4 = 5x_2 \ \text{ also } x_2 = -\frac{4}{5}} \\
\multicolumn{4}{l}{x_2 \text{ einsetzen gibt } \ \frac{2}{a} = -\frac{4}{5} \text{ also } \ a = -\frac{5}{2}}
\end{array}$$

Als Lösungsparabel erhalten wir

$$\boxed{f(x) = -\tfrac{5}{2}(x-3)\big(x+\tfrac{4}{5}\big)\,.}$$

P4d) $\underline{P(4/8),\ x=2,\ x=-2}$

Wir nutzen direkt die NSTF und setzen die beiden Nullstellen ein:

$$f(x) = a(x-2)(x+2)\,.$$

Da setzen wir unseren Punkt P ein und bekommen

$$8 = a(4-2)(4+2) = 12a \ \text{ also } \ a = \tfrac{2}{3}\,.$$

Die Lösungsparabel ist damit

$$\boxed{f(x) = \tfrac{2}{3}(x-2)(x+2)\,.}$$

4e) $\underline{x=-1,\ x=3,\ y=-4}$

Wir gehen genau wie in 4d vor und setzen nach den Nullstellen den Punkt $(0/-4)$ ein. Das Ergebnis ist dann

$$\boxed{f(x) = \tfrac{4}{3}(x+1)(x-3)\,.}$$