Frank Klinker

Elementare Steckbriefaufgaben

Lineare und quadratische Funktionen

1 Was ist eine Steckbriefaufgabe?

Unter einer **Steckbriefaufgabe** versteht man eine Aufgabe, bei der man die spezielle Gestalt einer Funktion herleiten soll.

Dazu sind mehrere, in einem Text codierte Informationen zu verwenden.

Die erhaltene Funktion muss dann alle im Text beschriebenen Eigenschaften erfüllen.

2 Lineare Funktionen/Geraden

Wir beginnen mit typischen Steckbriefaufgaben im Zusammenhang mit linearen Funktionen. Diese haben wir bereits bei der Diskussion linearer Funktionen kennen gelernt und sammeln sie hier nur nochmal zusammen.

Aufgaben (Grundaufgaben zur Bestimmung von Geraden)**.**

G1) Gegeben sind die Punkte $A(x_A/y_A)$ und $B(x_B/y_B)$. Bestimmen Sie eine Gerade, die durch beide Punkte verläuft.

G2) Gegeben ist der Punkt $P(x_P/y_P)$ und die Zahl m. Bestimmen Sie eine Gerade, die durch P verläuft und m als Steigung besitzt.

Es gibt Aufgaben, die sich auf die Grundaufgaben G1 und G2 zurückführen.[1] Diese lassen sich oftmals einfacher bzw. direkter lösen als der jeweilige allgemeine Aufgabe.

Aufgaben.

G1a) Gegeben sind der Punkt $P(x_P/y_P)$ und der Wert $y = b$. Bestimmen Sie eine Gerade, die durch P verläuft und in dem vorgegebenen Wert die y-Achse schneidet (oder: und den y-Achsenabschnitt b hat).

G1b) Gegeben sind der Punkt $P(x_P/y_P)$ und der Wert $x = x_1$. Bestimmen Sie eine Gerade, die durch P verläuft und in dem vorgegebenen Wert die x-Achse schneidet (oder: und in x_1 eine Nullstelle hat).

G2a) Gegeben sind die Zahl m und der Wert $y = b$. Bestimmen Sie eine Gerade, die die Steigung m hat und y-Achse in b schneidet (oder: und den y-Achsenabschnitt b hat).

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

[1] Die Unternummern geben jeweils Spezialfälle der Hauptnummer an.

G2b) Gegeben sind die Zahl m und der Wert $x = x_1$. Bestimmen Sie eine Gerade, die die Steigung m hat und die x-Achse in x_1 schneidet (oder: und in x_1 eine Nullstelle hat).

Jetzt folgen noch zwei Aufgabentypen, die die Lagebeziehung zwischen Geraden ausnutzen, d. h. ob sie parallel oder senkrecht zueinander sind:

Aufgaben.

G3) Gegeben sind die lineare Funktion $f(x) = mx + b$ und der Punkt $P(x_P/y_P)$. Bestimmen Sie eine Gerade, die parallel zu $f(x)$ ist und durch P verläuft.

G4) Gegeben sind die lineare Funktion $f(x) = mx + b$ und der Punkt $P(x_P/y_P)$. Bestimmen Sie eine Gerade, die durch P verläuft und zu $f(x)$ senkrecht ist.

Auch hier gibt es Weitere verwandte Aufgaben:

Aufgaben.

G3a) Gegeben sind die lineare Funktion $f(x) = mx + b$ und der Wert $y = d$. Bestimmen Sie eine Gerade, die parallel zu $f(x)$ ist und die y-Achse in dem vorgegebenen Wert schneidet (oder: und den y-Achsenabschnitt d hat).

G3b) Gegeben sind die lineare Funktion $f(x) = mx + b$ und der Wert $x = x_1$. Bestimmen Sie eine Gerade, die parallel zu $f(x)$ ist und die x-Achse im vorgegebenen Wert schneidet (oder: und in x_1 eine Nullstelle hat).

G4a) Gegeben sind die lineare Funktion $f(x) = mx + b$ und der Wert $y = d$. Bestimmen Sie eine Gerade, die senkrecht zu $f(x)$ ist und die y-Achse in d schneidet (oder: und den y-Achsenabschnitt d hat).

G4b) Gegeben sind die lineare Funktion $f(x) = mx + b$ und der Wert $x = x_1$. Bestimmen Sie eine Gerade, die senkrecht zu $f(x)$ ist und die x-Achse in x_1 schneidet (oder: und in x_1 eine Nullstelle hat).

3 Quadratische Funktionen/Parabeln

Wie bei den Geraden gibt es auch bei den Parabeln einige grundlegende Steckbriefaufgaben:

Aufgaben (Grundaufgaben zur Bestimmung von Parabeln)**.**

P1) Gegeben sind der Punkt $S(x_S/y_S)$ und die Zahl $a \neq 0$. Bestimmen Sie eine Parabel, die S als Scheitelpunkt und a als Öffnung besitzt.

P2) Gegeben sind der Punkt $S(x_S/y_S)$ und der Punkt $P(x_P/y_P)$. Bestimmen Sie eine Parabel, die S als Scheitelpunkt besitzt und durch P verläuft.

P3) Gegeben sind die Zahl $a \neq 0$ und die Punkte $P(x_P/y_P)$ und $Q(x_Q/y_Q)$. Bestimmen Sie eine Parabel, die die Öffnung a hat und durch die Punkte P und Q verläuft.

P4) Gegeben sind die drei Punkte $P(x_P/y_P)$, $Q(x_Q/y_Q)$ und $R(x_R/y_R)$. Bestimmen Sie eine Parabel, die durch die Punkte P, Q und R verläuft.

Die oftmals einfacher bzw. direkter zu lösenden Spezialfälle sind hier:

Aufgaben.

P2a) Gegeben sind der Punkt $S(x_S/y_S)$ und der Wert $x = x_1$. Bestimmen Sie eine Parabel, die S als Scheitelpunkt hat, und in dem vorgegebenen Wert die x-Achse schneidet.

P2b) Gegeben sind der Punkt $S(x_S/y_S)$ und der Wert $y = c$. Bestimmen Sie eine Parabel, die S als Scheitelpunkt hat, und in dem vorgegebenen Wert die y-Achse schneidet.

P3a) Gegeben sind die Zahl a und die Werte $x = x_1$ und $x = x_2$. Bestimmen Sie eine Parabel, die die Öffnung a hat und die x-Achse in den vorgegebenen Werten schneidet.

P3b) Gegeben sind die Zahl a und die Werte $x = x_1$ und $y = c$. Bestimmen Sie eine Parabel, die die Öffnung a hat, die x- bzw y-Achse in den vorgegebenen Werten schneidet.

P3c) Gegeben sind die Zahl a, der Punkt $P(x_P/y_P)$ und der Wert $x = x_1$. Bestimmen Sie eine Parabel, die die Öffnung a, die x-Achse in den vorgegebenen Wert schneidet, und den Punkt P enthält.

P3d) Gegeben sind die Zahl a, der Punkt $P(x_P/y_P)$ und der Wert $y = c$. Bestimmen Sie eine Parabel, die die Öffnung a, die y-Achse in den vorgegebenen Wert schneidet, und durch den Punkt P verläuft.

P4a) Gegeben sind die zwei Punkte $P(x_P/y_P)$, $Q(x_Q/y_Q)$ und der Wert $x = x_1$. Bestimmen Sie eine Parabel, die durch die Punkte P und Q verläuft und die x-Achse im vorgegebenen Wert schneidet.

P4b) Gegeben sind die zwei Punkte $P(x_P/y_P)$, $Q(x_Q/y_Q)$ und der Wert $y = c$. Bestimmen Sie eine Parabel, die durch die Punkte P und Q verläuft und die y-Achse im vorgegebenen Wert schneidet.

P4c) Gegeben sind der Punkt $P(x_P/y_P)$ und die Werte $x = x_1$ und $y = c$. Bestimmen Sie eine Parabel, die durch den Punkte P verläuft und die x- bzw. y-Achse in den vorgegebenen Werten schneidet.

P4d) Gegeben sind der Punkt $P(x_P/y_P)$ und die Werte $x = x_1$ und $x = x_2$. Bestimmen Sie eine Parabel, die durch den Punkte P verläuft und die x-Achse in den vorgegebenen Werten schneidet.

P4e) Gegeben sind die Werte $x = x_1$, $x = x_2$ und $y = c$. Bestimmen Sie eine Parabel, die die x-Achse in den zwei vorgegebenen x-Werten und die y-Achse in dem vorgegebenen y-Wert schneidet.

Bemerkung 1.

- Wenn man sich die Spezialfälle zu P4 ansieht, dann kann man zunächst den Fall dreier vorgegebener x-Werte vermissen. Das entspräche drei vorgegebenen Punkten $P(x_P/0)$ $Q(x_Q/0)$ und $R(x_R/0)$.

  Einerseits ist anschaulich klar, dass es keine Parabel mit drei Nullstellen geben kann.

  Andererseits kann man die Rechnungen analog zum Fall P4 durchführen und erhält als Normalform $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a = b = c = 0$.

  Das ist natürlich keine Parabel (da $a = 0$) aber eine Gerade (nämlich die x-Achse).

- Im allgemeinen Fall P4 kann $a = 0$ also als Lösung auftreten. Das hängt von der Wahl der Punkte P, Q und R ab.

  Die Funktion, die man erhält, ist dann eine Gerade $f(x) = bx + c$ (die x-Achse ist ein Spezialfall)

- Das Kriterium, wann das passiert ist geometrisch leicht einzusehen:

  Immer dann, wenn die drei Punkte auf einer Geraden liegen, dann ist genau diese Gerade die Lösung, und es gibt keine Parabel.

- Überprüfen kann man das, indem man die Quotienten $m_{PQ} = \dfrac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$ und $m_{PR} = \dfrac{y_P - y_R}{x_P - x_R}$ berechnet:

  Sind die gleich, also $m_{PQ} = m_{PR}$, so liegen P, Q und R auf einer Geraden und es gibt keine Parabel durch P, Q und R.

4 Beispiele zu den Parabelaufgaben

Wir nutzen die Schreibweisen

$$
\begin{array}{ll}
\text{NF:} & f(x) = ax^2 + bx + c \\
\text{SPF:} & f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S \\
\text{NSTF:} & f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)
\end{array}
$$

P1) $\underline{S = (-3/4),\ a = 4}$

Wir nutzen die SPF und setzen S und a ein. Das liefert sofort die Lösung

$$\boxed{f(x) = 4(x - (-3))^2 + 4 = 4(x + 3)^2 + 4\,.}$$

P2) $\underline{S(2/-3),\ P(1/-4)}$

Wir nutzen die SPF und setzen S ein:

$$f(x) = a(x - 2)^2 + (-3) = a(x - 2)^2 - 3\,.$$

Hier setzen wir nun P ein:

$$
\begin{aligned}
-4 &= a(1 - 2)^2 - 3 = a - 3 \qquad \Big| + 3 \\
-1 &= a
\end{aligned}
$$

Das liefert schließlich

$$\boxed{f(x) = -(x - 2)^2 - 3\,.}$$

P3) $\underline{a = 2,\ P = (1/{-2}),\ Q = (2/8)}$

Wir nutzen die NF und setzen a ein:

$$f(x) = 2x^2 + bx + c$$

Dann setzen wir P und Q ein:

$$
\begin{array}{rcll}
-2 & = & 2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & \\
8 & = & 2 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & \\
\hline
-4 & = & b + c & \\
0 & = & 2b + c & \\
\hline
-4 & = & b + c & \\
4 & = & b & (II - I) \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&b = 4 \\
&c = -4 - b = -8
\end{aligned}
$$

Das gibt als Ergebnis

$$\boxed{f(x) = 2x^2 + 4x - 8\,.}$$

P4) $\underline{P(1/{-2}),\ Q(-1/2),\ R(2/4)}$

Wir nutzen die NF und setzen die drei Punkte ein:

$$\begin{array}{rcll} -2 &=& a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c & \\ 2 &=& a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c & \\ 4 &=& a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c & \\ \hline -2 &=& a+b+c & \\ 2 &=& a-b+c & \\ 4 &=& 4a+2b+c & \\ \hline -2 &=& a+b+c & \\ 4 &=& -2b & (II-I) \\ 6 &=& 3a+b & (III-I) \\ \hline \end{array}$$

$b=-2$

$3a = 6-b = 8$ also $a=\frac{8}{3}$

$c = -2-a-b = -\frac{8}{3}$

Zusammen liefert das die Lösung

$$\boxed{f(x) = \tfrac{8}{3}x^2 - 2x - \tfrac{8}{3}\,.}$$

P2a) $\underline{S(2/4),\ x=1}$

Das lesen wir als $S(2/4)$, $P(1/0)$ und gehen wie in 2 vor. Die Lösung lautet

$$\boxed{f(x) = -4(x-2)^2 + 4\,.}$$

P2b) $\underline{S(1/3),\ y=7}$

Das lesen wir als $S(1/3)$, $P(0/7)$ und gehen wie in 2 vor. Die Lösung lautet

$$\boxed{f(x) = 4(x-1)^2 + 3\,.}$$

P3a) $\underline{a=2,\ x=1 \text{ und } x=7}$

Da die zwei x-Werte die Nullstellen sein sollen, setzen wir alles in NSTF ein und erhalten die Lösung

$$\boxed{f(x) = 2(x-1)(x-7)\,.}$$

P3b) $\underline{a=-2,\ x=3,\ y=4}$

Wir bieten hier zwei Lösungsmöglichkeiten.

- Wir starten mit der NSTF und setzen a und x_1 ein

$$f(x) = -2(x-3)(x-x_2)\,.$$

Hier setzen wir nun den Punkt (0/4) ein:

$$4 = -2(0-3)(0-x_2) = -6x_2 \quad \text{also} \quad x_2 = -\tfrac{2}{3}\,.$$

Das gibt dann die Lösung

$$\boxed{f(x) = -2(x-3)\big(x+\tfrac{2}{3}\big)\,.}$$

- Alternativ starten wir mit der NF und setzen a und y sofort ein:

$$f(x) = -2x^2 + bx + 4\,.$$

Jetzt setzen wir (3/0) ein und erhalten

$$0 = -2\cdot 3^2 + b\cdot 3 + 4 = -14 + 3b \quad \text{also} \quad b = \tfrac{14}{3}$$

und schließlich die Lösung

$$\boxed{f(x) = -2x^2 + \tfrac{11}{3}x + 4\,.}$$

P3c) $\underline{a = 2,\ P(1/-4),\ x = -1}$

Wir nutzen die NSTF und setzen a und die Nullstelle $x = -1$ ein:

$$f(x) = 2(x+1)(x-x_2)\,.$$

Als letzten Schritt setzen wir hier P ein:

$$-4 = 2(1+1)(1-x_2) = 4 - 4x_2 \quad \text{also} \quad x_2 = 2\,.$$

Als Ergebnis haben wir damit

$$\boxed{f(x) = 2(x+1)(x-2)\,.}$$

P3d) $\underline{a = -1,\ P(1/3),\ y = 4}$

Wir nutzen die NF und setzen direkt a und den y-Achsenabschnitt ein:

$$-x^2 + bx + 4\,.$$

Den Punkt P hier einsetzen gibt

$$3 = -1^2 + b\cdot 1 + 4 = 3 + b \text{ also } \ b = 0\,,$$

sodass

$$\boxed{f(x) = -x^2 + 4}$$

die gesuchte Parabel ist.

P4a) $\underline{P(-1/3),\ Q(3/6),\ x=1}$

- Wir können hier genauso vorgehen wie bei 4: dazu starten wir mit der NF und nutzen neben P und Q den Punkt (1/0).
- An dieser Stelle starten wir jedoch mit der NSTF und setzen die Nullstelle ein:

$$f(x) = a(x-1)(x-x_2)\,.$$

Dort setzen wir nun P und Q ein und erhalten ein nichtlineares Gleichungssystem für a und x_2:

$$\begin{array}{rcll} 3 &=& a(-1-1)(-1-x_2) = 2a(1+x_2) & \big| : a \\ 6 &=& a(3-1)(3-x_2) = 2a(3-x_2) & \big| : (2a) \\ \hline \frac{3}{a} &=& 2+2x_2 & \\ \frac{3}{a} &=& 3-x_2 & \\ \hline \end{array}$$

gleichsetzen gibt $2+2x_2 = 3-x_2$ also $3x_2 = 1$ also $x_2 = \frac{1}{3}$

x_2 einsetzen gibt $\frac{3}{a} = \frac{8}{3}$ also $a = \frac{9}{8}$

Zusammen erhalten wir die Parabel

$$\boxed{f(x) = \tfrac{9}{8}(x-1)\big(x-\tfrac{1}{3}\big)\,.}$$

P4b) $\underline{(P(1/3),\ Q(-2/1),\ y=1}$

Die Rechnung ist im Wesentlichen die gleiche, wie bei 4, nur dass man ein kleiner LGS hat. Wir nutzen die NF und setzen direkt den y-Achsenabschnitt $c=1$ ein:

$$f(x) = ax^2 + bc + 1\,.$$

Hier geben wir nun die zwei Punkte ein:

$$\begin{array}{rcll} 3 &=& a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + 1 & \\ 1 &=& a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + 1 & \\ \hline 2 &=& a+b & \\ 0 &=& 4a-2b & \\ \hline 2 &=& a+b & \\ 4 &=& 6a & (II + 2\cdot I) \\ \hline \end{array}$$

$$a = \frac{2}{3}$$

$$b = 2 - a = \frac{4}{3}$$

Das liefert die Parabel

$$\boxed{f(x) = \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{4}{3}x + 1\,.}$$

P4c) $\underline{P(-1/-2),\ x=3,\ y=6}$

- Auch hier können wir genauso vorgehen, wie bei 4 und mit der NF starten: dazu nutzen wir neben P die Punkte (3/0) und (0/6).
- Besser könnten wir auch 4b nutzen: dort setzen wir direkt $c = 6$ und neben P verwenden wir (3/0).
- An dieser Stelle starten wir jedoch wieder mit der NSTF und setzen die Nullstelle ein:

$$f(x) = a(x-3)(x-x_2)\,.$$

Anschließend werden P und (0/6) eingesetzt:

$$\begin{array}{rcll}
-2 & = & a(-1-3)(-1-x_2) & \\
6 & = & a(0-3)(0-x_2) & \\
\hline
-2 & = & = -4a(-1-x_2) & \big| : (-a) \\
6 & = & = 3ax_2 & \big| : (3a) \\
\hline
\frac{2}{a} & = & -4-4x_2 & \\
\frac{2}{a} & = & x_2 & \\
\hline
\end{array}$$

gleichsetzen gibt $\;-4-4x_2 = x_2\;$ also $\;-4 = 5x_2\;$ also $x_2 = -\frac{4}{5}$

x_2 einsetzen gibt $\;\frac{2}{a} = -\frac{4}{5}\;$ also $\;a = -\frac{5}{2}$

Als Lösungsparabel erhalten wir

$$\boxed{f(x) = -\tfrac{5}{2}(x-3)\big(x+\tfrac{4}{5}\big)\,.}$$

P4d) $\underline{P(4/8),\ x=2,\ x=-2}$

Wir nutzen direkt die NSTF und setzen die beiden Nullstellen ein:

$$f(x) = a(x-2)(x+2)\,.$$

Da setzen wir unseren Punkt P ein und bekommen

$$8 = a(4-2)(4+2) = 12a \quad \text{also} \quad a = \tfrac{2}{3}\,.$$

Die Lösungsparabel ist damit

$$\boxed{f(x) = \tfrac{2}{3}(x-2)(x+2)\,.}$$

4e) $\underline{x=-1,\ x=3,\ y=-4}$

Wir gehen genau wie in 4d vor und setzen nach den Nullstellen den Punkt (0/−4) ein. Das Ergebnis ist dann

$$\boxed{f(x) = \tfrac{4}{3}(x+1)(x-3)\,.}$$