Frank Klinker

Ganzrationale Funktionen

Teil 1: Definition und erste Eigenschaften

1 Einführung

Bisher kennen wir zwei Klassen von Funktionen sehr genau:

- Lineare Funktionen/Geraden:

  $f(x) = 4x - 3$

- Quadratische Funktionen/Parabeln:

  $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

Diese haben einen speziellen gemeinsamen "Aufbau". Um diesen zu erkennen, sehen wir uns allgemeinere Beispiele an:

- $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 9x - 2$
- $f(x) = x^4 - 12x^3 + x^2 - 3x + 1$
- $f(x) = -3x^5 + 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 7x + 5$

Wir sehen,

- dass alle Summanden der Funktion $f(x)$ Potenzen von x sind, die mit einem Vorfaktor versehen sein dürfen und
- dass von Zeile zu Zeile ein Summand hinzukommt, bei dem die Potenz von x einen um Eins größeren Exponenten hat.

> Funktionen, die einen solchen Aufbau haben, heißen **ganzrationale Funktionen** oder auch **Polynome**.
>
> Sie haben allgemein die folgende Gestalt:
>
> $$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + rx + s$$
>
> wobei $a, b, \ldots, r, s$ reelle Zahlen sind und n eine natürliche Zahl ist.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: June 5, 2024

Wir werden sehen, dass in einer ganzrationalen Funktion der erste Summand, nämlich der vor der höchsten Potenz von x, eine besondere Rolle spielt.

Deshalb erhalten die beteiligten Größen eigene Namen.

Spezielle Bezeichnungen bei Polynomen

Grad der ganzrationalen Funktion $f(x)$

$$f(x) = ax^{n} + bx^{n-1} + \ldots + rx + s$$

Leitkoeffizient der ganzrationalen Funktion $f(x)$

Beispiel 1.

$f(x)$	Grad von f	Leitkoefffizient
-5	0	-5
$3x + 12$	1	3
$-4x^3 + 2x^2 - 3x - 4$	3	-4
$x^2 - 3x + 4$	2	1
$-11x^4 - 12x^3 + 13x + 1$	4	-11
$36x^8 + x^6 - 4x^2 + 12x - 112$	8	36
$8x^{401} + 7x^2$	401	8

2 Erste Eigenschaften ganzrationaler Funktionen

2.1 Anzahl der Nullstellen und Extrema

Wir haben gesehen, dass wir über einige charakteristische Merkmale ganzrationaler Funktionen bereits sehr grundlegende Aussagen machen können.

Dazu müssen wir uns lediglich den Grad und das Vorzeichen des Leitkoeffizienten ansehen:

Charakteristische Merkmale ganzrationaler Funktionen

Anzahl der Nullstellen und Extrema

		Anzahl Nullstellen von $f(x)$	Anzahl Extrema von $f(x)$
Grad von $f(x)$	ungerade	mindestens 1 und höchstens Grad	höchstens (Grad-1)
	gerade	höchstens $\frac{\text{Grad}}{2}$	mindestens 1 und höchstens (Grad-1)

Verhalten des Graphen für betragsmäßig sehr große x-Werte

		Leitkoeffizient von $f(x)$	
		größer als 0	kleiner als 0
Grad von $f(x)$	ungerade	von $-\infty$ nach $+\infty$	von $+\infty$ nach $-\infty$
	gerade	von $+\infty$ nach $+\infty$	von $-\infty$ nach $-\infty$

Beispiel 2. In der obigen Tabelle zu den Anzahl der Nullstellen und Extrema sind immer Mindest- und Höchstgrenzen angegeben.
Bei den uns bekannten Funktionen, also den linearen und den quadratischen Funktionen, haben wir das bereits kennengelernt. Hier können alle möglichen Werte aus der Tabelle auftreten:

- Eine lineare Funktion hat immer eine Nullstelle.[1] Sie hat kein Extremum.
- Eine quadratische Funktion hat entweder keine, eine oder zwei Nullstellen. Sie hat immer genau ein Extremum, nämlich ihren Scheitelpunkt.

Für ganzrationale Funktionen mit Grad$\geq$ 3 gilt das nicht mehr ohne Weiteres. Wir können aber die folgende, allgemeine Aussage formulieren:

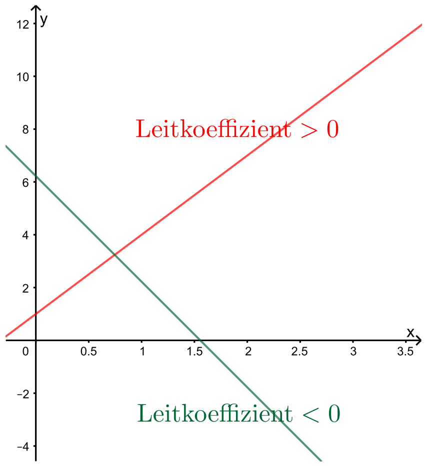
Bemerkung 3.
- Für die Anzahl der Nullstellen einer ganzrationale Funktion n-ten Grades können alle Werte zwischen den Grenzen aus der Tabelle auftreten.
- Die Anzahl der Extrema einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades ist immer $\left\{\begin{array}{ll} \text{gerade,} & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \\ \text{ungerade,} & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \end{array}\right\}$. Dabei können alle Werte zwischen den Grenzen aus der Tabelle auftreten.

Beispiel 4.
- Eine Funktion dritten Grades hat entweder eine, zwei oder drei Nullstellen. Außerdem hat sie entweder kein oder zwei Extrema.
- Eine Funktion vierten Grades hat entweder eine, zwei, drei oder vier Nullstellen. Außerdem hat sie entweder ein oder drei Extrema.
- Eine Funktion fünften Grades hat entweder eine, zwei, drei, vier oder fünf Nullstellen. Außerdem hat sie entweder kein, zwei oder vier Extrema.

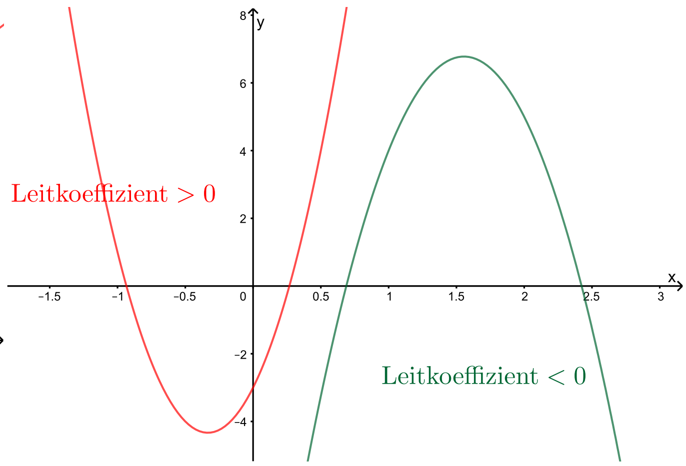
[1] Die linearen Funktionen beschreiben Geraden mit der Ausnahme der Geraden mit Steigung $m = 0$. Diese zählen nicht zu den linearen Funktionen! Die Geraden mit Steigung Null entsprechen einer konstanten Funktion und die ist ganzrational mit Grad 0.

Figure 1: Graphen ganzrationaler Funktionen mit Grad 1 bis 3

Grad 1



Grad 2



Grad 3