Frank Klinker

Grundlagen der Potenzrechnung

1 Grundlegendes zu Potenzen

Für alle rationalen Zahlen[1] $a \in \mathbb{Q}$ und alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ heißt der Ausdruck

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a}_{n\text{-mal}}}$$

eine **Potenz**, genauer die n**-te Potenz von** a. Dabei heißt a die **Basis** und n der **Exponent** der Potenz.

Z.B.

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2\,, \qquad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3\,, \qquad \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7}\,.$$

Für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gelten beim Umgang mit Potenzen die folgenden grundlegenden Rechenregeln:

$$\boxed{\begin{array}{ll}
1a) & a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\
1b) & a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{falls } m > n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{falls } n > m \end{cases} \\
2) & (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\
3a) & (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \\
3b) & (a : b)^n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}
\end{array}}$$

Achtung: Rechenregel $1b)$ ist <u>bisher</u> nur für $m \neq n$ sinnvoll, da nur dann die Exponenten auf der rechten Seite positiv sind. Außerdem ist Rechenregel $3b)$ nur für $b \neq 0$ erklärt.

2 Erweiterung auf Exponenten die kleiner oder gleich Null sind

Ziel: Unser Ziel ist es, bei Potenzen auch ganze, negative Exponenten oder die Null

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

[1] Die natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
Die ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Die rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{Q}$ ist auch die Menge aller abbrechenden oder periodischen Dezimalzahlen

zuzulassen. D. h., wir wollen z. B. die folgenden Ausdrücke berechnen können:

$$3^{-8}\,, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^0, \qquad \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4}}{5^3}$$

Permanenzprinzip: Dabei möchten wir alle bisherigen Rechenregeln weiter verwenden können. Es kommen allenfalls neue Regeln hinzu.

2.1 Erweiterung auf den Exponenten Null

Wir wollen zunächst a^0 sinnvoll erklären. Dazu verwenden wir Rechenregel 1a), die ja weiterhin gültig bleiben soll:

Wir rechnen mit $a^1 = a$:

$$a = a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0 \quad \text{also} \quad a = a \cdot a^0\,.$$

Diese Gleichung soll nun für alle $a \in \mathbb{Q}$ korrekt sein, also insbesondere für $a \neq 0$. Für $a \neq 0$ dürfen wir beide Seiten der letzten Gleichung durch a teilen:

$$\begin{aligned} & a = a \cdot a^0 && \Big|\; : a \\ \Longrightarrow\ & 1 = 1 \cdot a^0 \\ \Longrightarrow\ & 1 = a^0\,. \end{aligned}$$

Das nehmen wir nun als unsere neue Rechenregel: Für alle $a \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq 0$ setzen wir[2]:

$$\boxed{4) \quad a^0 = 1\,.}$$

Somit haben wir erreicht, dass der Exponent einer Potenz außer eine natürliche Zahl auch die Null sein darf.

> Genau genommen müssen wir nun noch zeigen, dass diese Erweiterung auch tatsächlich die Regeln 1b), 2), 3a) und 3b) erfüllt (Die Regel 1a) ist erfüllt, da wir diese zur Herleitung von 4) verwendet haben!).
>
> Dazu müssen wir in jeder Formel links und rechts den Exponent 0 für m oder n oder beide einsetzen und zeigen, dass mit Hilfe von Regel 4) auf beiden Seiten das gleiche herauskommt.
>
> Z.B. Regel 2):
>
> $$\underline{m = 0:} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{linke Seite:} & (a^0)^n \overset{4)}{=} 1^n = 1 \\ \text{rechte Seite:} & a^{0\cdot n} = a^0 \overset{4)}{=} 1 \end{array} \right\} \text{beide geben das gleiche Ergebnis!}$$
>
> $$\underline{n = 0:} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{linke Seite:} & (a^m)^0 \overset{4)}{=} 1 \\ \text{rechte Seite:} & a^{m\cdot 0} = a^0 \overset{4)}{=} 1 \end{array} \right\} \text{beide geben das gleiche Ergebnis!}$$
>
> $$\underline{m = n = 0:} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{linke Seite:} & (a^0)^0 \overset{4)}{=} 1^0 \overset{4)}{=} 1 \\ \text{rechte Seite:} & a^{0\cdot 0} = a^0 \overset{4)}{=} 1 \end{array} \right\} \text{beide geben das gleiche Ergebnis!}$$

[2] Der Ausdruck 0^0 ist nicht definiert und kann daher nicht berechnet werden — vergleichbar mit dem Ausdruck $\frac{0}{0}$.

Z.B. Regel 3a):

$$\underline{n=0:}\quad \left.\begin{array}{ll} \text{linke Seite:} & (a\cdot b)^0 \overset{4)}{=} 1 \\ \text{rechte Seite:} & a^0\cdot b^0 \overset{4)}{=} 1\cdot 1 = 1 \end{array}\right\}\ \text{beide geben das gleiche Ergebnis!}$$

Erweiterte Aufgabe: Zeige, dass die Rechenregeln 1b) und 3b) auch gültig bleiben, wenn man als Exponent die Null zulässt.

2.2 Erweiterung auf ganzzahlige, negative Exponenten

Jetzt wollen wir auch noch negative Exponenten zulassen und verstehen, wie a^{-n} für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ zu erklären ist.

Dazu verwenden wir Rechenregeln 1a) und 1b), die ja weiterhin gültig bleiben soll. Einerseits berechnen wir für alle $a \neq 0$ und alle natürlichen Zahlen $m > n$:

$$\frac{a^m}{a^n} \overset{1b)}{=} a^{m-n}\,.$$

Andererseits soll gelten

$$a^m \cdot a^{-n} \overset{1a)}{=} a^{m+(-n)} = a^{m-n}\,.$$

Beides zusammen liefert damit

$$a^m \cdot a^{-n} = \frac{a^m}{a^n}\,.$$

Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung durch a^m dividieren erhalten wir unsere neue Regel: Für alle rationalen Zahlen $a \neq 0$ gilt

$$\boxed{5)\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}\,.}$$

Wir müssen auch hier noch zeigen, dass diese Erweiterung auch tatsächlich die Regeln 2, 5a, 5b und die fehlenden Fälle von 1b) erfüllt (Regel 1a) und einen Teil von 1b) haben wir bereits für die Herleitung von 5) verwendet.

Z.B. Regel 1a):

$$\underline{m=-p<0:}\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{linke Seite:} & a^{-p}\cdot a^n \overset{5)}{=} \frac{1}{a^p}\cdot a^n = \frac{a^n}{a^p} = \begin{cases} a^{n-p} & \text{falls } n \geq p \\ \frac{1}{a^{p-n}} & \text{falls } n < p \end{cases} \\ \text{rechte Seite:} & a^{(-p)+n} = \begin{cases} a^{n-p} & \text{falls } n \geq p \\ a^{-(p-n)} \overset{5)}{=} \frac{1}{a^{p-n}} & \text{falls } n < p \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\underline{n=-q<0:}\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{linke Seite:} & a^{m}\cdot a^{-q} \overset{5)}{=} a^m \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{a^m}{a^q} = \begin{cases} a^{m-q} & \text{falls } m \geq q \\ \frac{1}{a^{q-m}} & \text{falls } m < q \end{cases} \\ \text{rechte Seite:} & a^{m+(-q)} = \begin{cases} a^{m-q} & \text{falls } m \geq q \\ a^{-(q-m)} \overset{5)}{=} \frac{1}{a^{q-m}} & \text{falls } m < q \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\underline{m=-p, n=-q:}\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{linke Seite:} & a^{-p}\cdot a^{-q} \overset{5)}{=} \frac{1}{a^p}\cdot\frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p\cdot a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} \\ \text{rechte Seite:} & a^{(-p)+(-q)} = a^{-(p+q)} \overset{5)}{=} \frac{1}{a^{p+q}} \end{array}\right.$$

Z.B. Regel $3b$):

$$\underline{n=-p<0:}\quad \begin{cases} \text{linke Seite:} & \left(\frac{a}{b}\right)^{-p} \overset{5)}{=} \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \frac{1}{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{b^p}{a^p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p \\ \text{rechte Seite:} & \frac{a^{-p}}{b^{-p}} \overset{5)}{=} \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{\frac{1}{b^p}} = \frac{1}{a^p \cdot \frac{1}{b^p}} = \frac{b^p}{a^p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p \end{cases}$$

Erweiterte Aufgabe: Zeige, dass die Rechenregeln $1b$, 2 und $5b$ auch gültig bleiben, wenn man als Exponent negative Zahlen zulässt.

3 Zusammenfassung

Wir haben erreicht, dass wir für alle rationalen Basen $a \in \mathbb{Q}$ und ganzzahlige Exponenten $n \in \mathbb{Z}$ die Potenz a^n berechnen können.

Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ gelten die **Rechenregeln**

$$\boxed{\begin{array}{llll} 1a) & a^m \cdot a^n = a^{m+n} & 1b) & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ 2) & (a^m)^n = a^{m \cdot n} & & \\ 3a) & (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n & 3b) & \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ 4) & a^0 = 1 & & \\ 5) & a^{-n} = \frac{1}{a^n} & & \end{array}}$$

Wie die Rechnungen oben zeigen, folgt aus 5) und $3b$) die zum Rechnen nützliche **Zusatzregel**:

$$\boxed{5') \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

Die Rechenregeln zum Umgang mit Potenzen sind nicht unabhängig voneinander:

Erweiterte Aufgabe: Zeige, dass die Regel $1b$) aus $1a$) und 5) folgt.

Erweiterte Aufgabe: Zeige, dass die Regel $3b$) aus $3a$) und 5) folgt.

Praktische Anwendung der Rechenregel 5): Haben wir einen Bruch, in dem eine Potenz im Nenner (bzw. Zähler) steht, dann können wir diese Potenz in den Zähler (bzw. Nenner) schreiben, wenn wir das Vorzeichen des Exponenten ändern.

Es gilt also für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\dots}{\dots \cdot a^k} = \frac{\dots \cdot a^{-k}}{\dots}$$

Beispiel:

$$\frac{4n^7x^3}{8n^3x^4} = \frac{4}{8n^3x^4n^{-7}x^{-3}} = \frac{4n^7x^3n^{-3}x^{-4}}{8}$$

Das formen wir dann mit Hilfe der Rechenregeln weiter um:

$$\frac{4n^7x^3}{8n^3x^4} = \frac{4}{8n^3x^4n^{-7}x^{-3}} = \frac{{}^{1}\cancel{4}}{{}_{2}\cancel{8}n^{3+(-7)}x^{4+(-3)}} = \frac{1}{2n^{-4}x^1} = \frac{n^4}{2x}$$

oder

$$\frac{4n^7x^3}{8n^3x^4} = \frac{4n^7x^3n^{-3}x^{-4}}{8} = \frac{{}^{1}\cancel{4}n^{7+(-3)}x^{3+(-4)}}{{}_{2}\cancel{8}} = \frac{n^4x^{-1}}{2} = \frac{n^4}{2x^1} = \frac{n^4}{2x}$$