Frank Klinker

Stochastik

Teil 4: Das Urnenmodell, Abzählverfahren und Kombinatorik

1 Warum Kombinatorik? ... und das Urnenmodell

In vielen Problemstellung innerhalb der Stochastik kommt man zu dem Problem, dass man die Anzahl möglicher Anordnungen oder die Anzahl der Auswahlen von Objekten benötigt; Etwa im Zusammenhang mit Laplace-Experimenten, wo sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Quotient der Anzahl der Elemente zweier Mengen berechnen lässt. Genau mit diesem systematischen Zählen und Berechnen von Anzahlen beschäftigt sich die **Kombinatorik** als Teilgebiet der Mathematik.

Eine elegante Methode ein Zufallsexperiment zu simulieren ist das **Urnenmodell**.

Beispiele für Urnenmodelle:

Zufallsexperiment	**Urnenmodell**
einfaches Würfelexperiment	Urne mit Sechs unterschiedlich gefärbten Kugeln, einmal ziehen
Augensumme zweier Würfel	Urne mit 36 Kugeln markiert mit den Ziffern 2 bis 12 (je einmal 2 und 12, je zweimal 3 und 11, je dreimal 3 und 10, je viermal 4 und 9, je fünfmal 5 und 8, ja sechsmal 6 und 8, siebenmal 7), einmal ziehen
Paare aus einer Menge von 100 Menschen wählen	Urne mit 100 identischen Kugeln, zweimal ziehen

1. Bei dem Befüllen der Urne ist entscheidend, ob man die Kugeln unterscheiden kann oder nicht.

   Das ist wichtig, wenn man beim mehrmaligen Ziehen aus der Urne die Reihenfolge der gezogenen Kugeln beachten muss oder nicht beachten darf (wenn man die Reihenfolge beachten muss, dann müssen die Kugeln unterscheidbar sein).

2. Beim Ziehen aus der Urne ist es wichtig, ob man die gezogene Kugel wieder zurücklegt oder nicht.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 27. Dezember 2025

Das ist wichtig, wenn beim mehrmaligen Ziehen aus der Urne Wiederholungen erlaubt sind oder nicht erlaubt sind (man darf eine gezogene Kugel nicht zurücklegen, wenn Wiederholungen nicht erlaubt sind).

Grundfrage beim Urnenmodell: Auf wie viele Arten kann man eine Reihe von Kugel aus einer befüllten Urne ziehen?

2 Die wichtigsten Arten Kugeln zu ziehen

Zur Festlegung der Notation in den folgenden Abschnitten ist unsere Urne mit N Kugeln gefüllt und wir ziehen k-mal hintereinander eine Kugel aus der Urne.

- Wenn wir die Kugeln nicht zurücklegen, dann ist selbstverständlich $k \leq N$
- Ziehen wir mit Zurücklegen, dann ist k nicht beschränkt.

2.1 Ziehen mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge

Wir Zählen wie viele Möglichkeiten es gibt, k Kugeln nacheinander zu ziehen, wenn man die gezogene Kugel jedes mal zurücklegt:

- Beim ersten Zug hat man N verschiedene Möglichkeiten zu ziehen
- Beim zweiten Zug hat man N verschiedene Möglichkeiten zu ziehen (da man die Kugel zurückgelegt hat).

  $\vdots$
- Beim k-ten Zug hat man N verschiedene Möglichkeiten zu ziehen (aus dem gleichen Grund).

Insgesamt hat man also

$$\underbrace{N \cdot N \cdot \ldots \cdot N}_{k\text{-mal}} = N^k$$

verschiedene Möglichkeiten die k Kugeln zu ziehen. Die Reihenfolge der Ziehung der Kugeln wird hier strikt berücksichtigt!

Aus einer Kugel mit N Kugeln kann man auf

$$N^k$$

Arten k Kugeln **mit Zurücklegen** und **mit Beachtung der Reihenfolge** ziehen.

Notation 1. Eine geordnete Reihe von Zahlen nennt man auch[1] **k-Tupel** und man schreibt dann

$$(2, 3, 9, 5)$$

für das 4-Tupel mit den Zahlen 2, 3, 9 und 5. Dieses unterscheidet sich von dem 4-Tupel $(2, 3, 5, 9)$, da die Reihenfolge wichtig ist!

2.2 Ziehen ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge

Die Idee ist wie vorher, nur dass man bei jedem folgenden Zug weniger Möglichkeiten hat, da man die Kugel nicht zurücklegt:

- Beim ersten Zug hat man N verschiedene Möglichkeiten zu ziehen
- Beim zweiten Zug hat man $N - 1$ verschiedene Möglichkeiten zu ziehen (da man die Kugel nicht zurückgelegt hat).

  $\vdots$
- Beim k-ten Zug hat man $N - k + 1$ verschiedene Möglichkeiten zu ziehen (aus dem gleichen Grund).

Insgesamt hat man also[2]

$$N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-k+1) = \frac{N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(N-k) \cdot (N-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{N!}{(N-k)!}$$

verschiedene Möglichkeiten die k Kugeln zu ziehen. Die Reihenfolge der Ziehung der Kugeln wird hier strikt berücksichtigt!

> Aus einer Kugel mit N Kugeln kann man auf
>
> $$\frac{N!}{(N-k)!}$$
>
> Arten k Kugeln **ohne Zurücklegen** und **mit Beachtung der Reihenfolge** ziehen.

Bemerkung 2. Zieht man aus einer Urne ohne Zurücklegen alle Kugeln, dann kann man das auf $N!$ viele Arten tun.

Das entspricht dann der Anzahl an Möglichkeiten, auf die man N Kugeln hintereinander anordnen kann.

[1] Ein 2-Tupel heißt Paar und ein 3-Tupel heißt Tripel.

[2] Das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis zu einer festen positiven Zahl n heißt die **Fakultät** der Zahl n und man schreibt $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ und spricht das n-Fakultät aus. Ergänzt wird das durch $0! = 1$.

2.3 Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

Wir wissen aus dem letzten Abschnitt, dass wir auf $\frac{N!}{(N-k)!}$ verschiedene Arten ziehen können, wenn wir die Reihenfolge beachten.

Wenn uns die Reihenfolge nun egal ist, dann müssen wir hier jetzt all die Ziehungen miteinander identifizieren, die die gleichen k Kugeln enthalten.

Wir wählen dazu eine beliebige Ziehung aus, d. h. eine Reihe von k Kugeln. Die gesuchte Zahl entspricht jetzt der Anzahl der Möglichkeiten, wie wir diese k Kugeln anordnen können. Das ist $k!$ wegen Bemerkung 2.

Beispiel 3. Für das Ziehen von $k = 3$ Kugeln (etwa mit den Zahlen 4, 6 und 9) hat man $3! = 6$ verschiedene 3-Tupel, die man identifizieren muss:

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\,.$$

Insgesamt haben wir also $\frac{N!}{(N-k)!}$ Ziehungen von denen wir jeweils $k!$ identifizieren müssen. Es ergibt sich damit eine Anzahl von[3]

$$\frac{\frac{N!}{(N-k)!}}{k!} = \frac{N!}{k!(N-k)!} = \binom{N}{k}\,.$$

verschiedenen Möglichkeiten die k Kugeln zu ziehen. Die Reihenfolge der Ziehung der Kugeln wird hier nicht mehr berücksichtigt!

> Aus einer Kugel mit N Kugeln kann man auf
>
> $$\binom{N}{k}$$
>
> Arten k Kugeln **ohne Zurücklegen** und **ohne Beachtung der Reihenfolge** ziehen.

Beispiel 4. Es muss beim "normalen" Lotto 6 Zahlen auf einem Feld mit 49 Zahlen ankreuzen. Da die Reihenfolge, in der man seine Kreuze macht, egal ist, hat man

$$\binom{49}{6} = 13.983.816$$

Möglichkeiten seine Kreuze zu verteilen. Nimmt man noch die Superzahl hinzu, dann erhöht sich die Anzahl der Möglichkeiten um den Faktor $\binom{10}{1} = 10$.

2.4 Ziehen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

Wir beginnen mit einem Beispiel, die die Abzählidee motivieren sollen:

[3]Den Wert $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$ heißt Binomialkoeffizient der Zahlen N und k und man ließt das als "N über k". Der Binomialkoeffizient ist wegen $0! = 1$ insbesondere auch für $k = 0$ und $k = N$ definiert.

Beispiel 5. Wir haben eine Urne mit $N = 5$ Kugeln, die von 1 bis 5 nummeriert sind. Daraus ziehen wir $k = 3$ Kugeln mit Zurücklegen. Wenn wir die Reihenfolge nicht beachten, dann ergeben sich folgende Ziehungen (wir dürfen sortieren!):

- keine doppelte Kugel (10 Ziehungen):

  123,124,125,134,135,145,234,235,245,345
- genau zwei doppelte Kugeln (20 Ziehungen):

  112,113,114,115,122,223,224,225,133,233,334,335,144,244,344,445,155,255,355,455
- genau drei doppelte Kugeln:

  111,222,333,444,555 (5 Ziehungen)

Das macht zusammen 35 unterschiedliche Ziehungen.

Wir interpretieren die Ziehungen nun anders: Wir nehmen drei (gleiche) Kugeln und dazu nehmen wir fünf Personen und verteilen jetzt 3 Kugeln auf diese 5 Personen. So identifizieren wir eine Ziehung von oben mit einer Verteilung auf die Personen, z. B.

	145	114	233	444
1. Person	1	2	0	0
2. Person	0	0	1	0
3. Person	0	0	2	0
4. Person	1	1	0	3
5. Person	1	0	0	0

Wir bezeichnen jetzt mit † die 5 Personen und mit $\circ$ die drei Kugeln. Dann sehen die Ziehungen (bzw. Verteilungen) wie folgt aus:

$$\begin{array}{lcccccccc}
145: & \dagger & \circ & \dagger & \dagger & \dagger & \circ & \dagger & \circ \\
114: & \dagger & \circ & \circ & \dagger & \dagger & \dagger & \circ & \dagger \\
233: & \dagger & \dagger & \circ & \dagger & \circ & \circ & \dagger & \dagger \\
444: & \dagger & \dagger & \dagger & \dagger & \circ & \circ & \circ & \dagger
\end{array}$$

Wenn man jetzt noch berücksichtigt, dass das erste † immer auf den Anfang festgelegt ist, dann bekommt man eine 1:1-Zuordnung zwischen einer Ziehung, und einer Verteilung von vier † und drei $\circ$ (beachte: nur vier †, weil ja der erste festliegt), z. B. $244 \longleftrightarrow (\dagger)\ \dagger \circ \dagger \dagger \circ \circ \dagger$ oder $145 \longleftrightarrow (\dagger)\ \circ \dagger \dagger \dagger \circ \dagger \circ$.

Statt der Ziehungen, zählen wir nun die Verteilungen von $N - 1 = 4$ mal † und $k = 3$ mal $\circ$:

Es gibt $(N - 1 + k)! = 7!$ Möglichkeiten die Symbole zu verteilen. Da man aber die $\circ$ nicht unterscheiden kann, müssen wir diesen Wert durch $k!$ dividieren. Da man auch die † nicht unterscheiden kann, müssen wir auch durch $(N - 1)! = 4!$ teilen, und wir erhalten

$$\frac{(N-1+k)!}{k!(N-1)!} = \binom{N+k-1}{k} = \binom{7}{3} = 35\,.$$

Dieses Beispiel kann man nun ohne Probleme auf beliebige Werte für N und k erweitern und man erhält:

> Aus einer Kugel mit N Kugeln kann man auf
>
> $$\binom{N+k-1}{k}$$
>
> Arten k Kugeln **mit Zurücklegen** und **ohne Beachtung der Reihenfolge** ziehen.

2.5 Zusammenfassung

	ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung)	**mit Zurücklegen** (mit Wiederholung)
mit Reihenfolge (**Variationen**)	$\frac{n!}{(n-r)!}$ (**nPr**)	n^r
ohne Reihenfolge (**Kombinationen**)	$\binom{n}{r}$ (**nCr**)	$\binom{n+r-1}{r}$

3 Eigenschaften der Fakultät und der Binomialkoeffizienten

3.1 Rechenregeln

Für die Fakultät und die Binomialkoeffizienten gelten folgende Rechenregeln:

1) $n! = (n-1)! \cdot n$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n+1}{k-1}$

4) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

5) $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$

3.2 Das Pascalsche Dreieck

Rechenregel 3) gibt das **Pascalsche Dreieck**:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\quad\longleftrightarrow\quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

(Ein Eintrag ergibt sich immer als die Summe der beiden darüber stehenden Einträge.

3.3 Zusammenhänge zu speziellen Funktionen

Die Fakultäten treten auch beim Ableiten auf:

- $f(x) = x^n \Longrightarrow f^{(k)} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)x^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$
- $f(x) = x^n \Longrightarrow f^{(n)} = n!$

Wenn man

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n\text{-mal}}$$

ausmultipliziert, dann tauchen nur Summanden der Form $x^k y^\ell$ mit $k+\ell = n$ auf; das heißt, alle Summanden sind von der Form $x^k y^{n-k}$ und zwar für $k = 0, 1, \ldots n$.

Von so einem Summanden gibt es dann $\binom{n}{k}$, denn auf genau so viele Arten kann man in dem obigen Klammerprodukt k-mal ein x und $(n-k)$-mal ein y auswählen.

Man bekommt also

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n}x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\,.
\end{aligned}
$$

Das gibt ein paar spezielle weitere Rechenregeln

6) $x = y = 1$

$$
\begin{aligned}
2^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}
\end{aligned}
$$

7) $x = -1, y = 1$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \\ &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} \end{aligned}$$

Leitet man $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ auf beiden Seiten nach x ab, dann bekommt man

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} y^{n-k}$$

und

$$n(n-1)(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2} y^{n-k} .$$

Das liefert weitere Summenformeln:

8) $x = y = 1$ in die erste Ableitung eingesetzt gibt

$$2^{n-1} n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} .$$

9) $x = 1, y = 1$ in die zweite Ableitung eingesetzt gibt zusammen mit 8)

$$2^{n-2}(n^2 + n) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} .$$

10) $x = -1, y = 1$ in die erste Ableitung eingesetzt gibt

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} .$$

11) $x = -1, y = 1$ in die zweite Ableitung eingesetzt gibt zusammen mit 10)

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 \binom{n}{k} .$$

12) Induktiv erhält man durch weiteres Ableiten und Einsetzen von $x = -1, y = 1$ für alle m

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^m \binom{n}{k} .$$

Die Formeln 7), 10), 11) und schließlich die zusammenfassende Formel 12) sind im Wesentlichen eine Umformulierung der Tatsache, dass die Funktion $f(x) = x^n$ an der Stelle $x = 0$ eine n-fache Nullstelle hat.