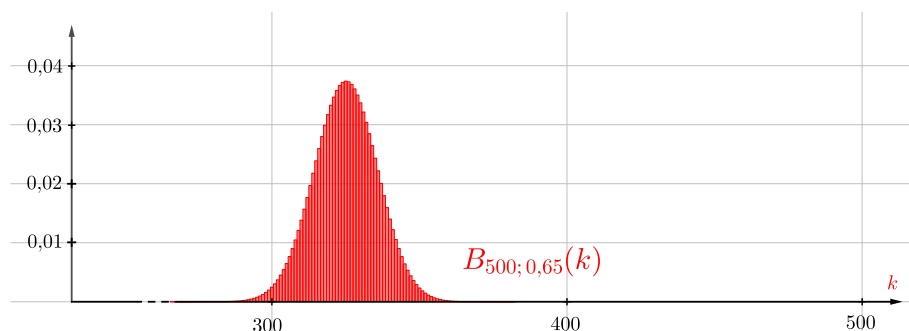


1 Die Gauß-Glocke als Näherung der Binomialverteilung

1.1 Eigenschaften der Binomialverteilung und seines Graphen

Bei der Untersuchung der Binomialverteilung haben wir gesehen, dass diese (mit einigen Ausnahmen) "glockenförmig" ist:



Bemerkung 1. Eigenschaften des Graphen der Binomialverteilung:

1. Für eine (n, p) -binomialverteilte Zufallsvariable X entspricht

$$P(X = k) = B_{n,p}(k)$$

der Höhe des rechteckigen Balkens im Diagramm zum Wert k . Das entspricht genau der Fläche des rechteckigen Balkens, da jeder Balken genau die Breite 1 hat.

2. Für eine (n, p) -binomialverteilte Zufallsvariable X entspricht

$$P(X \leq k) = B_{n,p}^{\text{kum}}(k) = \sum_{\ell=0}^k B_{n,p}(\ell)$$

dem kumulierten Wert der Binomialverteilung. Dies entspricht der Summe der Flächen aller rechteckigen Balken von 0 bis zu k .

3. Nur für $p = 0,5$ ist der Graph der Binomialverteilung eine "symmetrische Glocke".
4. Für $p < 0,5$ ist die Glocke auf der linken Seite steiler als auf der rechten Seite; man sagt auch: die Verteilung ist **rechtsschief**.

Wegen der Achsensymmetrie $B_{n,p}(k) = B_{n,1-p}(n-k)$ ist diese Schiefe für $p > 0,5$ genau andersherum: die Verteilung ist dann **linksschief**.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm

E-Mail: mail@frank-klinker.de

Version: 21. Januar 2026

5. Wenn die Varianz $\sigma^2 = npq$ groß genug ist, dann ist die Binomialverteilung annähernd symmetrisch. Hier reicht $npq > 9$ – das nennt man auch die Laplace-Bedingung.

1.2 Die Gaußsche Glockenkurve

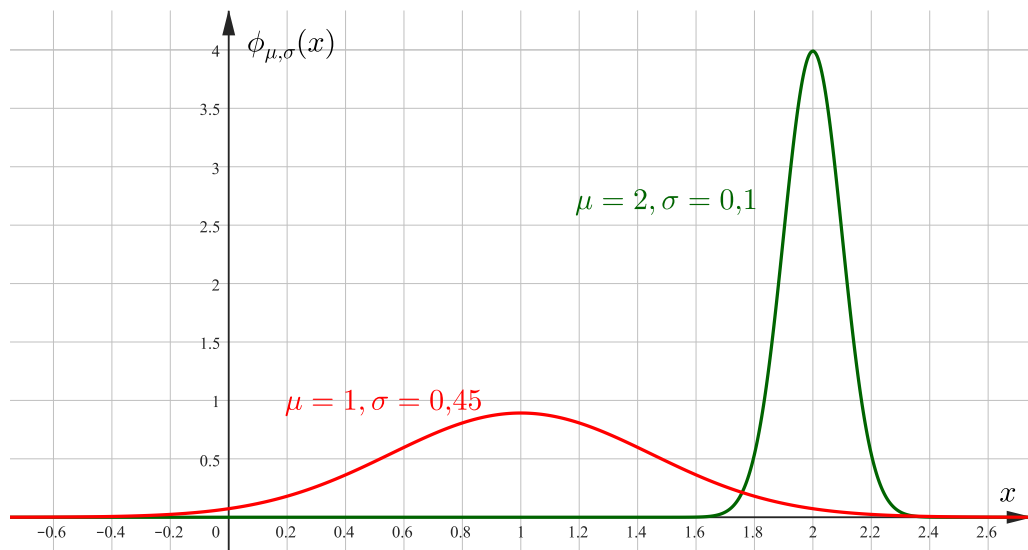
Ein "Problem" der Binomialverteilung als Funktion ist, dass wir nicht all das Handwerkszeug verwenden können, das wir für den Umgang mit Funktionen entwickelt haben. Das liegt daran, dass der Definitionsbereich der Binomialverteilung diskret ist: Für die Funktion $B_{n,p}(k)$ sind das die Zahlen $k = 0, 1, \dots, n$. Zur Anwendung unserer analytischen Methoden, benötigen wir als Definitionsbereich jedoch ein Intervall oder am besten sogar ganz $\mathbb{R}$.

Um dieses "Problem" anzugehen, machen wir uns die Glockenform der Binomialverteilung zunutze. Wir kennen bereits einige "echte" Funktionen, die eine Glockenform haben¹, z. B. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ oder $f(x) = e^{-x^2}$.

Für unsere Zwecke wird sich das zweite Beispiel, also $f(x) = e^{-x^2}$, als nützlich herausstellen. Damit wir etwas mehr Varianten dieser Funktion bekommen, werden wir sie in der Form

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

verwenden. Dabei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^{>0}$ frei wählbare reelle Parameter², z. B.



¹Diese beiden Beispiele zeigen sogar, wie man eine Funktion mit "Glockengraph" bekommen kann: Man nimmt eine Funktion die 1) in $x = 0$ ein Minimum mit einem Wert größer Null hat, die 2) für $x \rightarrow \pm\infty$ nicht beschränkt ist und die 3) überall (außer vielleicht in $x = 0$) positiv gekrümmt ist (also $f''(x) > 0$). Von dieser nimmt man nun den Kehrwert und man erhält eine Glocke! In den Beispielen sind das die Funktionen $1 + x^2$ und e^{x^2} .

²Durch die Parameter wird die Funktion e^{-x^2} um den Wert μ nach rechts verschoben und in x -Richtung durch den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ sowie in y -Richtung durch den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ gestreckt bzw. gestaucht.

Den Graphen der Funktion $\phi_{\mu,\sigma}(x)$ nennt man auch die Gaußsche Glockenkurve oder kurz: die Gauß-Glocke:

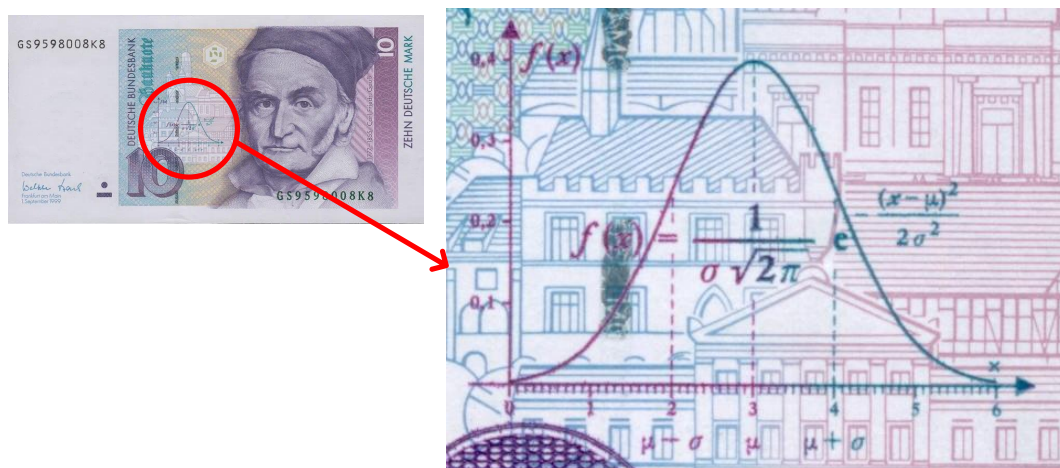


Abb.: Die Gauß-Glocke auf dem letzten 10-Mark-Schein ($\mu = 3, \sigma = 1$)

Die etwas willkürliche Wahl des Vorfaktors in der Funktion $\phi_{\mu,\sigma}(x)$ erklärt sich, wenn man die Fläche unterhalb des Graphen untersucht. Dazu schreiben wir

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^x \phi_{\mu,\sigma}(t) dt.$$

Bemerkung 2. Eigenschaften der Fläche unterhalb der Gaußschen Glockenkurve:

1. Obwohl wir hier über einen unendlich großen Bereich der reellen Achse integrieren, ist der Flächeninhalt endlich.
2. Man kann die Stammfunktion von $\phi_{\mu,\sigma}(x)$ nicht explizit angeben. Dennoch kann man das Integral im Prinzip beliebig genau berechnen.
3. Durch den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ bekommt die Gesamtfläche unter der Gaußschen Glockenkurve den Wert 1, also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mu,\sigma}(t) dt = 1.$$

4. Wegen der Symmetrie der Gaußschen Glockenkurve um den Wert $x = \mu$ gilt

$$\Phi_{\mu,\sigma}(\mu + x) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma}(\mu - x),$$

also

$$\Phi_{\mu,\sigma}(\mu + x) - \Phi_{\mu,\sigma}(\mu - x) = 1 - 2\Phi_{\mu,\sigma}(\mu - x).$$

Insbesondere gilt $\Phi(\mu) = \frac{1}{2}$.

1.3 Die Glockenkurve als stetige Näherung der Binomialverteilung

Vergleicht man die Binomialverteilung $B_{n,p}(k)$ und die Gaußsche Glockenkurve $\phi_{\mu,\sigma}(x)$, dann erkennt man, dass für die Wahl

$$\mu = np \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{npq}$$

beide fast perfekt übereinstimmen – zumindest immer dann, wenn die Binomialverteilung eine annähernd symmetrische Glocke ausbildet; z. B.

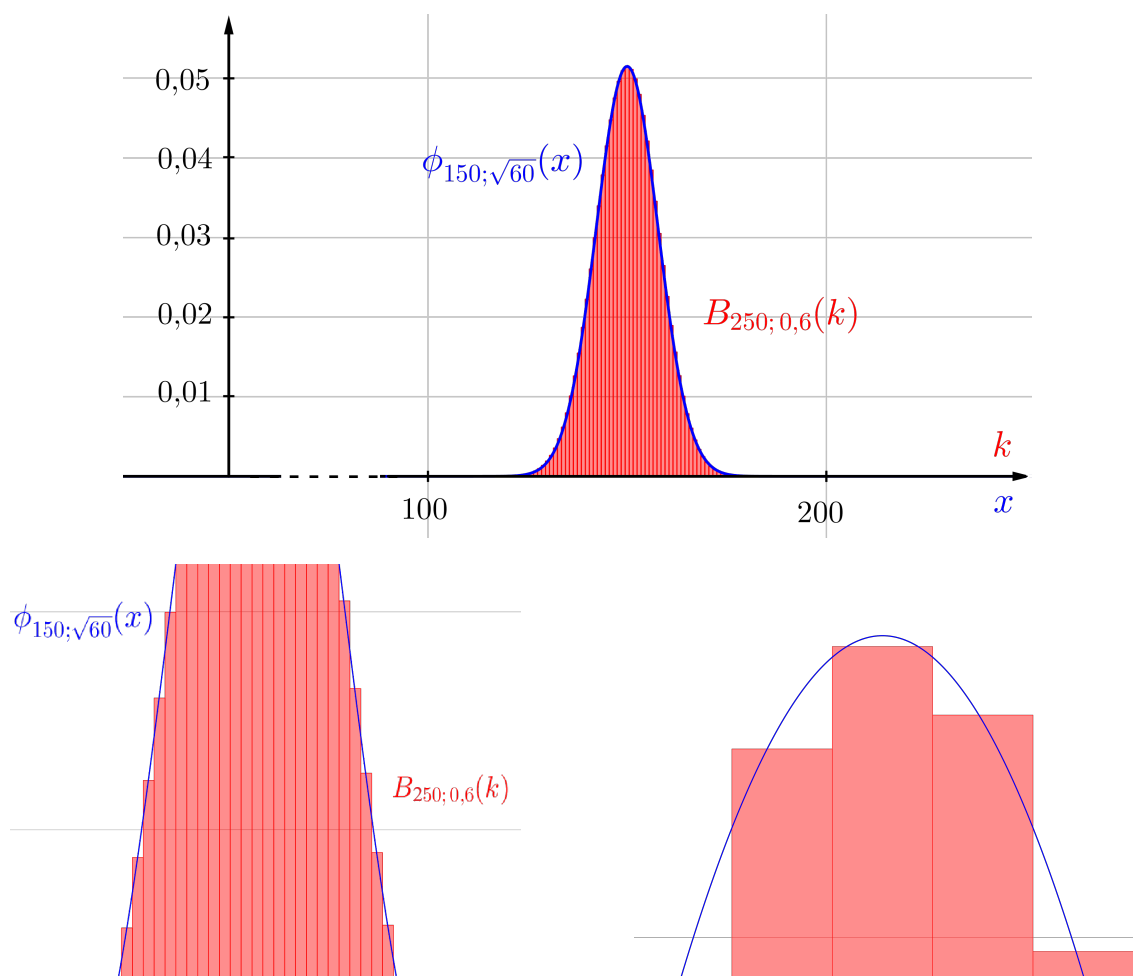


Abb.: $B_{n,p}(k)$ und $\phi_{\mu\sigma}$ im Vergleich (mit $n = 250$ und $p = 0,6$, also $\mu = 250 \cdot 0,6 = 150$ und $\sigma = \sqrt{250 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = \sqrt{60}$).

Weil die Fläche unter der Gauß-Glocke ungefähr der Fläche der rechteckigen Balken entspricht, haben wir für eine (n, p) -verteilte Zufallsvariable X die Näherungswerte

$$P(X \leq k) = B_{n,p}^{\text{kum}}(k) \approx \Phi_{\mu,\sigma}(k + 0,5).$$

Dabei nutzen wir $\mu = np, \sigma = \sqrt{npq}$.³

³Der Korrekturwert $+0,5$ ist nötig, weil ohne diesen Korrekturwert die Fläche unter der Gauß-Glocke etwas kleiner ist als die Rechteckflächen. Das kann man in der Detailskizze ganz gut erkennen.

1.4 Eine kleine Formelsammlung

Ist X eine (n, p) -verteilte Zufallsvariable, d. h.

$$P(X = k) = B_{n,p}(k) \quad \text{und} \quad P(X \leq k) = B_{n,p}^{\text{kum}}(k) = \sum_{\ell=0}^k B_{n,p}(\ell),$$

dann gelten mit $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{npq}$ die folgenden Näherungsformeln:

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &\approx \Phi_{\mu,\sigma}(k + 0,5) \\ P(X < k) &\approx \Phi_{\mu,\sigma}(k - 0,5) \\ P(X > k) &\approx 1 - \Phi_{\mu,\sigma}(k + 0,5) \\ P(X \geq k) &\approx 1 - \Phi_{\mu,\sigma}(k - 0,5) \\ P(X = k) &\approx \Phi_{\mu,\sigma}(k + 0,5) - \Phi_{\mu,\sigma}(k - 0,5) \\ P(k_1 \leq X \leq k_2) &\approx \Phi_{\mu,\sigma}(k_2 + 0,5) - \Phi_{\mu,\sigma}(k_1 - 0,5) \\ P(|X - np| \leq k) &\approx 1 - 2\Phi_{\mu,\sigma}(\mu - k - 0,5) \end{aligned}$$

2 Die Normalverteilung als stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung

2.1 Die Gauß-Glocke als Wahrscheinlichkeitsverteilung

2.2 Die Standardnormalverteilung

2.3 Einige weiterführende Rechnungen

2.3.1 Die Vollständigkeit der Normalverteilung

2.3.2 Berechnung von Erwartungswert und Varianz der NV