

1 Die Begriffe Variable und Term

1.1 Variablen

Zunächst klären wir die grundlegenden Begriffe Variable und Term und verdeutlichen das an mehreren Beispielen. Wir beginnen mit der Variablen:

- ▷ Eine **Variable** bezeichnet einen Platzhalter – typischerweise einen Platzhalter für eine Zahl (später auch für komplexere Objekte).
- ▷ Zur Bezeichnung von Variablen werden in der Regel kleine lateinische Buchstaben vom Ende des Alphabets verwendet – typischerweise s, t, u, v, w, x, y , und z .
- ▷ Wir können Variablen mit anderen Variablen und mit Zahlen multiplizieren, addieren, dividieren und subtrahieren.
- ▷ Insbesondere gelten die gleichen Rechenregeln, wie beim Umgang mit Zahlen.

Beispiel 1. • $3 \cdot x + 2 \cdot x = (2 + 3) \cdot x = 5 \cdot x$

• $8 \cdot (y + 4) = 8 \cdot y + 32$

• $(y + t) + u = y + (t + u)$

• $v \cdot v = v^2$

• $(x^z)^t = x^{z \cdot t}$

• $z^y \cdot z^7 = z^{y+7}$

• $x^y : 7^y = (x : 7)^y$

• $a^y \cdot b^y = (a \cdot b)^y$

1.2 Terme

Gerade die letzten beiden Punkte im oben stehenden Kasten zusammen mit den Beispielen liefern den Begriff des (mathematischen) Terms:

▷ Als **Term** bezeichnen wir einen korrekten mathematischen Ausdruck, der bei uns die folgenden 'Zutaten' haben kann:
Zahlen, Variablen, Klammern, Rechenzeichen (+, −, ·, :) und damit verknüpfte Schreibweisen (z. B. Brüche, Potenzen und später Funktionen)

Beispiel 2. • $2 + 3 \cdot 7$ ist ein Term

- $\frac{x + y}{2 \cdot z}$ ist ein Term
- $2 \cdot x + 4^7$ ist ein Term
- $2 + 3 \cdot + 4$ ist kein Term
- $4^+ \cdot 8 \cdot x$ ist kein Term
- $\frac{t^{17 \cdot x + y^2}}{14} \cdot \frac{1}{8^{\frac{6}{y} + \frac{z}{2}}}$ ist ein Term
- $\frac{8}{2+} - 4$ ist kein Term

Hinweis. Um zu testen, ob ein Ausdruck tatsächlich ein Term ist, kann man wie folgt vorgehen:

Ersetze im Ausdruck jede Variable durch eine feste Zahl. Kann man den so erhaltenen Ausdruck berechnen, dann ist der Ausdruck mit den Variablen höchstwahrscheinlich ein Term!

Bemerkung 3. Multiplizieren wir Variablen mit Zahlen oder Variablen mit gleichen oder anderen Variablen, dann sparen wir uns den Malpunkt "·". Dabei gilt die Verabredung, dass in einem Produkt aus Variablen und Zahlen stets zuerst die Zahlen aufgeführt werden. Z. B.

- $4 \cdot x = 4x$
- $x + y \cdot z = x + yz$
- $y \cdot 7 = 7 \cdot y = 7y$
- $y \cdot x \cdot x \cdot z \cdot z \cdot z = x^2yz^3$

2 Mit Termen arbeiten

Mit Termen können wir auf verschiedene Weisen 'arbeiten'.

Insbesondere können wir Terme mit Hilfe der Rechenregeln vereinfachen oder wir können die Variablen durch feste Werte ersetzen.

2.1 Terme umformen und vereinfachen

Mit Hilfe der üblichen Rechenregeln lassen sich Terme oft vereinfachen.

In den ersten Beispielen oben haben wir das bereits auf einfache Weise ausgenutzt. Aber es geht auch etwas komplizierter.

Beispiel 4.

$$\begin{aligned}(2xy + 5x^2) \cdot (7x - 3y) &= 2xy \cdot 7x - 2xy \cdot 3y + 5x^2 \cdot 7x - 5x^2 \cdot 3y \\ &= 2 \cdot 7xxy - 2 \cdot 3xyy + 5 \cdot 7x^2x - 5 \cdot 3x^2y \\ &= 14x^2y - 6xy^2 + 35x^3 - 15x^2y \\ &= 14x^2y - 15x^2y - 6xy^2 + 35x^3 \\ &= -x^2y - 6xy^2 + 35x^3\end{aligned}$$

Beispiel 5. • Ein Term, in dem Zahlen und Variablen nur durch Multiplizieren verbunden sind, heißt **multiplikativer Term**; z. B.

$$0,5x \quad 4xy \quad \frac{1}{2}uvw \quad 3x^2yz^7$$

- Zwei multiplikative Terme heißen **gleichnamig**, wenn Sie die gleichen Variablen in genau gleicher Anzahl enthalten. Dabei spielt die Reihenfolge keine Rolle:
 - $4y$ und $2,5y$ sind gleichnamig
 - x und $7z$ sind nicht gleichnamig
 - $12xyz$ und $56yzx$ sind gleichnamig
 - $7z^2x^2y$ und $xzyxz$ sind gleichnamig
 - z^2y^2x und $2xyzx^2$ sind nicht gleichnamig
- Werden multiplikative Terme addiert oder subtrahiert, dann darf man die gleichnamigen – und nur diese! – zusammenfassen:
 - $4x + 2y - 2x + 2y = 4x - 2x + 2y + 2y = 2x + 4y$
 - $4xy + 2x^2z - 7yx + 2xz^2 = 2x^2z + 2xz^2 + 4xy - 7yx = 2x^2z + 2xz^2 - 3xy$

2.2 Variablen durch feste Werte ersetzen

In Hinweis 1.2 haben wir schon gesehen, dass es sinnvoll sein kann, in einem Term Variablen durch Zahlen zu ersetzen.

▷ In einen mathematischen Term, der Variablen enthält, können wir **Werte einsetzen**. Dazu ersetzen wir den 'Platzhalter' durch einen festen Wert.

Beispiel 6. • $x = 4$ eingesetzt in den Term

$$4x$$

gibt $4 \cdot 4$ und schließlich den Wert 16

• $x = 2, y = 4$ und $z = 3$ eingesetzt in den Term

$$\frac{x + y}{2z}$$

gibt $\frac{2+4}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1$

• $t = 2, x = 17, y = 6$ und $z = 4$ eingesetzt in den Term

$$t \cdot (x : 17 + y) : 14 + \left(6 : y + \frac{z}{2}\right)$$

gibt $2 \cdot (17 : 17 + 6) : 14 + \left(6 : 6 + \frac{4}{2}\right) = 2 \cdot 7 : 14 + (1 + 2) = 1 + 3 = 4$

• $t = 1, x = 10, y = 6$ und $z = 4$ eingesetzt in den Term

$$\frac{t^{17x+y^2}}{14} \cdot 8^{\frac{6}{y} + \frac{z}{2}}$$

gibt $\frac{1^{17 \cdot 10 + 4^2}}{14} \cdot 8^{\frac{6}{6} + \frac{4}{2}}$ und schließlich den Wert $\frac{1^{186}}{14} \cdot 8^3 = \frac{1}{14} \cdot 512 = \frac{256}{7}$