Frank Klinker

Trigonometrie

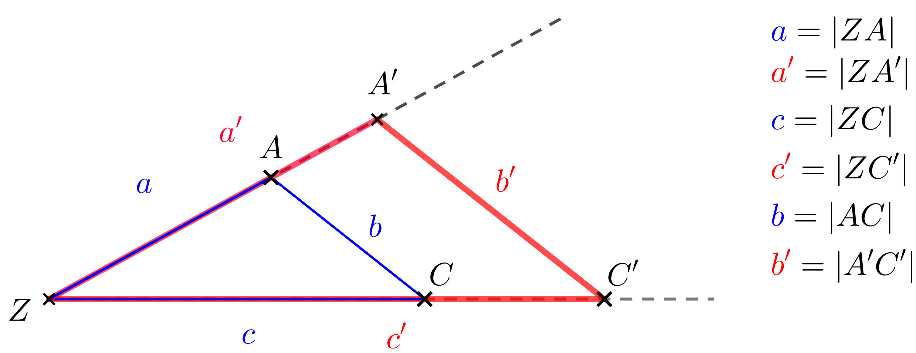
Teil 1: Die Definitionen am rechtwinkligen Dreieck

1 Vorbemerkung: Die Strahlensätze

Bereits bei der Herleitung der Steigung von Geraden ist uns aufgefallen, dass unterschiedlich große Steigungsdreiecke die gleiche Steigung liefern. Die Steigung war nur von der "Form" des Dreiecks abhängig. Dabei sagen wir: zwei Dreiecke haben die gleiche "Form", wenn die Winkel in beiden Dreiecken übereinstimmen. Man nennt solche Dreiecke dann **ähnlich**.

Die **Strahlensätze** befassen sich mit den Verhältnissen von Seitenlängen in ähnlichen Dreiecken. Dazu sieht man sich zwei Strahlen an, die von einem gemeinsamen Punkt Z ausgehen. Zwischen diese Strahlen zeichnet man quer zwei Strecken, die parallel zueinander sind, $\overline{AC}$ und $\overline{A'C'}$. Dadurch erhalten wir zwei ähnliche Dreiecke: das blaue $\triangle(ZAC)$ und das rote $\triangle(ZA'C')$, siehe Abb. 1.

Abbildung 1: Die geometrische Situation der Strahlensätze



Allgemein lauten die Strahlensätze wie folgt:

Die Verhältnisse zueinander gehöriger Seiten in ähnlichen Dreiecken sind gleich

Die drei zu Abb. 1 gehörigen Strahlensätze lauten:

$$\boxed{\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \qquad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}}$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

2 Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

2.1 Bezeichnungen am (rechtwinkligen) Dreieck

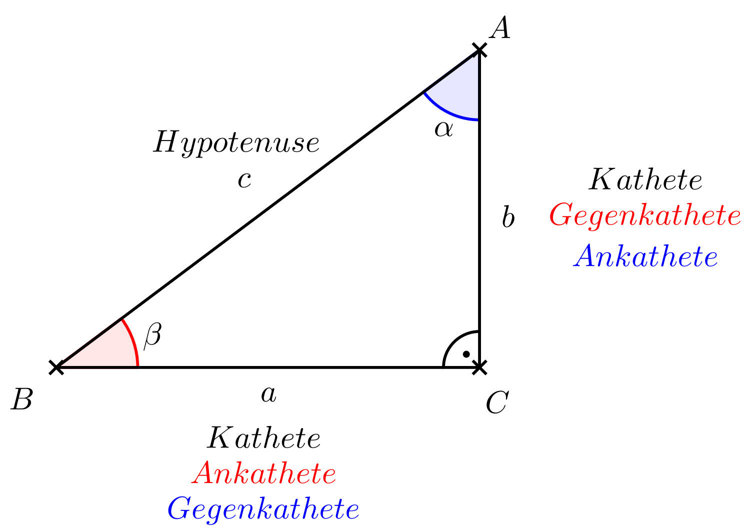
In diesem Abschnitt machen wir uns das Leben etwas einfacher: Statt beliebiger Dreiecke sehen wir uns nur rechtwinklige Dreiecke an. Wir wiederholen einige typische Bezeichnungen am (rechtwinkligen) Dreieck, siehe auch Abb. 2.

- Die Punkte eines Dreiecks benennen wir mit großen lateinischen Buchstaben.
- Die jeweils einem Punkt gegenüberliegende Seite erhält den gleichen Namen wie dieser Punkt, allerdings als kleinen lateinischen Buchstaben.
- Der Winkel, der an einem Punkt liegt erhält ebenfalls den gleichen Namen wie dieser Punkt, allerdings als kleinen griechischen Buchstaben.
- In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die, dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite **Hypotenuse** (Hyp).
- Die beiden Schenkel eines rechtwinkligen Dreiecks heißen **Katheten**.
- Wenn wir in einem rechtwinkligen Dreieck einen der anderen beiden Winkel festhalten, dann heißt die Kathete, die diesem Winkel gegenüberliegt, seine **Gegenkathete** (GK); die Kathete, die an diesem Winkel liegt, heißt **Ankathete** (AK). (Ankathete und Gegenkathete tauschen ihre Namen also, wenn wir den Winkel wechseln)

Fakt 1: Wegen des Satzes von Pythagoras ist die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck immer die längste Seite und es gilt $\text{Hyp}^2 = \text{GK}^2 + \text{AK}^2$.

Fakt 2: Die Winkelsumme in einem Dreieck ist immer 180°. In einem rechtwinkligen Dreieck gilt daher für die beiden zusätzlichen Winkel immer $\alpha + \beta = 90°$.

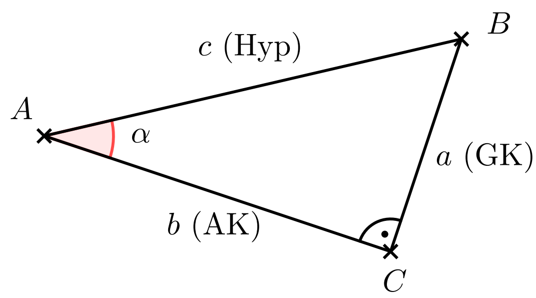
Abbildung 2: Die Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck



2.2 Die trigonometrischen Ausdrücke

Sehen wir uns das rechtwinklige Dreieck noch einmal an, diesmal achten wir jedoch nur auf einen der beiden Winkel, α. Dann ist A die Gegenkathete und b die Ankathete, siehe Abb. 3.

Abbildung 3: Das rechtwinklige Dreieck



Bemerkung 1. Der Strahlensatz sagt uns nun: Wenn wir das Dreieck vergrößern oder verkleinern, dann bleibt der Quotient $\frac{\text{GK}}{\text{Hyp}}$ immer der gleiche. Dasselbe gilt auch für die Quotienten $\frac{\text{AK}}{\text{Hyp}}$ und $\frac{\text{GK}}{\text{AK}}$.
Diese Quotienten hängen also einzig von dem Winkel ab, auf den man sich gerade bezieht

Wegen dieser Bemerkung geben wir diesen Quotienten nun Namen, die sich auf den zugehörigen Winkel beziehen

> In einem rechtwinkligen Dreieck setzen wir
>
> | | |
> |---|---|
> | $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{GK}}{\text{Hyp}}$ | **Sinus von** α |
> | $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{AK}}{\text{Hyp}}$ | **Kosinus von** α |
> | $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{GK}}{\text{AK}}$ | **Tangens von** α |

Beispiel 2. In dem Dreieck in Abb. 3 messen wir die Seitenlängen $a = 3{,}9\,LE$, $b = 6{,}3\,LE$ und $c = 7{,}4\,LE$ und die Winkel $\alpha = 31{,}5°$ und $\beta = 58{,}5°$. damit sind:

$$\begin{aligned}
\sin(31{,}5°) &= \frac{a}{c} = \frac{3{,}9}{7{,}4} \approx 0{,}52\,, & \cos(31{,}5°) &= \frac{b}{c} = \frac{6{,}3}{7{,}4} \approx 0{,}85\,,\\
\tan(31{,}5°)\frac{a}{b} &= \frac{3{,}9}{6{,}3} \approx 0{,}62\,, & \sin(58{,}5°) &= \frac{b}{c} = \frac{6{,}3}{7{,}4} \approx 0{,}85\,,\\
\sin(58{,}5°) &= \frac{a}{c} = \frac{3{,}9}{7{,}4} \approx 0{,}52\,, & \sin(58{,}5°) &= \frac{b}{a} = \frac{6{,}3}{9{,}3} \approx 1{,}62\,.
\end{aligned}$$

Bemerkung 3. Wir haben in der obigen Definition die Quotienten mehr oder weniger willkürlich gebildet. Statt der dort betrachteten, hätten wir ebenso gut die Kehrwerte verwenden können. Diese sind dann per Definition die Kehrwerte der obigen Ausdrücke. Sie besitzen ebenfalls eigene Namen:

$$\csc(\alpha) = \frac{\text{Hyp}}{\text{GK}} = \frac{1}{\sin(\alpha)} \qquad \textbf{Kosekans von } \alpha$$

$$\sec(\alpha) = \frac{\text{Hyp}}{\text{AK}} = \frac{1}{\cos(\alpha)} \qquad \textbf{Sekans von } \alpha$$

$$\boxed{\cot(\alpha) = \frac{\text{AK}}{\text{GK}} = \frac{1}{\tan(\alpha)} \qquad \textbf{Kotangens von } \alpha}$$

Der Sekans und der Kosekans spielen eine eher untergeordnete Rolle und werden allenfalls in speziellen technischen Anwendung oder der Kartographie verwendet.

Der Kotangens als Kehrwert des Tangens ist jedoch eine sehr nützliche, weit verbreitete und oft verwendete Größe.

2.3 Die Grundaufgaben

Die Grundaufgabe der Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck lässt sich wie folgt formulieren:

> In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β sind zwei der fünf Größen gegeben. Unter den zwei gegebenen muss sich mindestens eine Seite befinden. Man bestimme eine spezielle oder alle fehlenden Größen.

Drei Beispiele zu dieser Hauptaufgabe findet man in Beispiel 4.

Alle zu diesem Thema behandelten Anwendungsaufgaben lassen sich auf diese Grundproblematik zurückführen. Die Hauptaufgabe besteht dann in der Regel darin, innerhalb einer Skizze zur Anwendung ein oder mehrere geeignete rechtwinklige Dreiecke zu finden oder zu ergänzen, siehe Beispiel 5.

Beispiel 4. Als Grundlage für diese Aufgabe nutzen wir die Bezeichnungen aus der Abb. 4.

1) Gegeben sind $\alpha = 25°$ und $c = 50\,cm$. Bestimmen Sie die anderen Größen.

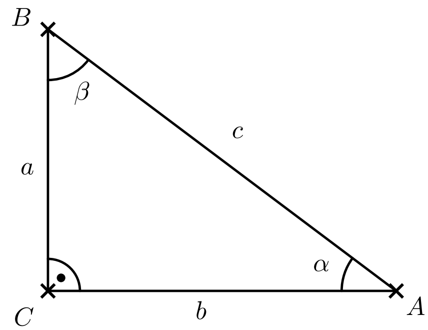
   - $\underline{a:}$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{a}{c} \qquad \Big| \cdot c \\ a &= c \cdot \sin(\alpha) \\ a &= 50\,cm \cdot \sin(25°) \approx 21{,}13\,cm \end{aligned}$$

   - $\underline{b:}$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{b}{c} \qquad \Big| \cdot c \\ b &= c \cdot \cos(\alpha) \\ b &= 50\,cm \cdot \cos(25°) \approx 45{,}32\,cm \end{aligned}$$

Abbildung 4: Zu Beispiel 4



- $\underline{\beta}$:

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \frac{a}{c} \\ \cos(\beta) &\approx \frac{21{,}13}{50} \approx 0{,}42 && \Big| \cos^{-1} \\ \beta &= \cos^{-1}(0{,}42) \approx 65{,}16^\circ \end{aligned}$$

2) Gegeben sind $\beta = 35^\circ$ und $a = 21\,cm$. Bestimmen Sie die anderen Größen.

- $\underline{b}$:

$$\begin{aligned} \tan(\beta) &= \frac{b}{a} && \Big| \cdot a \\ b &= a \cdot \tan(\beta) \\ b &= 21\,cm \cdot \tan(35^\circ) \approx 14{,}70\,cm \end{aligned}$$

- $\underline{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{a}{b} \\ \tan(\alpha) &\approx \frac{21}{14{,}70} \approx 0{,}70 && \Big| \tan^{-1} \\ \alpha &= \tan^{-1}(0{,}70) \approx 55{,}01^\circ \end{aligned}$$

- $\underline{c}$:

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \frac{a}{c} && \Big| \cdot c \\ c \cdot \cos(\beta) &= a && \Big| : \cos(\beta) \\ c &= \frac{a}{\cos(\beta)} \\ c &= \frac{21\,cm}{\cos(35^\circ)} \approx 25{,}65\,cm \end{aligned}$$

3) Gegeben sind $b = 12\,cm$ und $a = 20\,cm$. Bestimmen Sie die anderen Größen.

- $\underline{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{a}{b} \\ \tan(\alpha) &= \frac{20}{12} \approx 1{,}67 && \Big| \tan^{-1} \\ \alpha &\approx \tan^{-1}(1{,}67) \approx 59{,}09^\circ \end{aligned}$$

- $\underline{c}$:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{a}{c} && \Big| \cdot c \\ c \cdot \sin(\alpha) &= a && \Big| : \sin(\alpha) \\ c &= \frac{a}{\sin(\alpha)} \\ c &\approx \frac{20\,cm}{\sin(59{,}09^\circ)} \approx 23{,}31\,cm \end{aligned}$$

- $\underline{\beta}$:

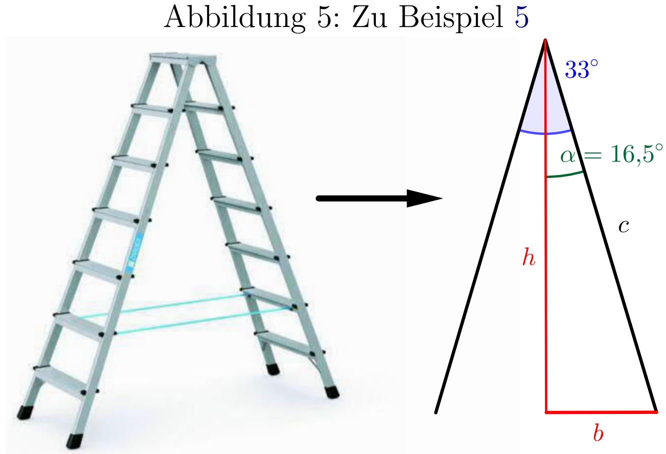
$$\begin{aligned} \tan(\beta) &= \frac{b}{a} \\ \tan(\beta) &= \frac{12}{20} = 0{,}6 && \Big| \tan^{-1} \\ \beta &= \tan^{-1}(0{,}6) \approx 30{,}96^\circ \end{aligned}$$

In diesen Beispielen gibt es Abweichungen bei $\alpha + \beta = 90^\circ$ oder $c^2 = a^2 + b^2$. Diese haben ihre Ursache in Rundungsfehlern, die man während der Rechnungen erhält.

Beispiel 5. Die zwei Seiten einer Stehleiter bilden geöffnet einen Winkel von 33°. Wie lang sind die Seiten der Leiter, wenn sie aufgestellt eine Höhe von $h = 2{,}80\,m$ hat? Wie viel Platz benötigt die Leiter?

Zunächst reduzieren wir das Problem und fertigen eine Skizze an. In dieser markieren wir die gegebenen und gesuchten Größen (hier der Öffnungswinkel, die Höhe h und die Leiterlänge c, die halbe Standweite b). Dann suchen wir ein rechtwinkliges Dreieck, mit dem wir arbeiten können (hier das Dreieck mit den Seiten h, c und b). Darin identifizieren wir einen Winkel (hier den halben Öffnungswinkel α), siehe Abb. 5.

Abbildung 5: Zu Beispiel 5



In diesem Dreieck berechnen wir für die Länge c der Leiter:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{h}{c} && \Big| \cdot c \\ c \cdot \cos(\alpha) &= h && \Big| : \cos(\alpha) \\ c &= \frac{h}{\cos(\alpha)} \\ c &= \frac{2{,}80\,m}{\cos(16{,}5^\circ)} \approx 2,92\,m \end{aligned}$$

Der halbe Platzverbrauch ist durch b gegeben:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{b}{h} && \Big| \cdot h \\ b &= h \cdot \tan(\alpha) \\ b &= 2{,}80\,m \cdot \tan(16{,}5^\circ) \approx 0{,}83\,m \end{aligned}$$

Der Platzverbrauch ist also $2b \approx 1{,}66\,m$.

2.4 Eine technische Anwendung

Beispiel 6 (Das Gewinde einer Schraube, siehe Abb. 6). Wickelt man das Gewinde einer zylindrischen Schraube in eine Ebene ab, so erhält man eine gerade Strecke. Durch dieses Abwickeln des Gewindes erhält man in natürlicher Weise ein rechtwinkliges Dreieck (das rote Dreieck in Abb. 6).
Als **Steigungswinkel** α des Gewindes bezeichnet man den Winkel in diesem Dreieck, für den die **Ganghöhe** P die Gegenkathete bildet.

- Für ein Gewinde bei dem die Ganghöhe P und der maximale Durchmesser D bekannt sind, berechnet sich der Steigungswinkel mit Hilfe von

$$\tan(\alpha) = \frac{P}{\pi D}\,.$$

- Sind für das Gewinde seine Länge L und die Gesamtzahl k der Umläufe des Gewindes angegeben, dann gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{L}{k\pi D}\,.$$

Der Steigungswinkel einer metrischen Schraube liegt zwischen 2° und 3°.

In einer Zeichnung wird der Steigungswinkel alternativ zur Ganghöhe eingezeichnet.

Nicht zu verwechseln ist der Steigungswinkel mit dem vergleichbar großen Winkel β, den man erhält, wenn man das rechtwinklige Dreieck in der Parallelprojektion der Schraube betrachtet (das blaue Dreieck in Abb. 6). Für diesen gilt $\tan(\beta) = \frac{P}{2D}$.

Die grundlegenden Teilskizzen in Abb. 6 entstammen mit freundlicher Genehmigung der GSR Gustav Stursberg GmbH der Seite https://gewindeaufschneider.de/blog/gewindeprofile-bestimmungsgroessen-am-gewinde/

Abbildung 6: Der Steigungswinkel eines Gewindes (Beispiel 6)