Frank Klinker

Trigonometrie

Teil 3: Sinus und Kosinus für beliebige Winkel

1 Sinus und Kosinus im Koordinatensystem

Wir haben uns den Sinus und Kosinus bisher für Winkel α in rechtwinkligen Dreiecken angesehen. Diese Winkel liegen aber immer zwischen $0°$ und $90°$, also $0° < \alpha < 90°$.

Um nun auch andere Winkel ins Spiel zu bringen zeichnen wir unser rechtwinkliges Dreieck in ein Koordinatensystem. Wir wissen, dass Sinus und Kosinus eines Winkels nicht von der Grösße des Dreiecks abhängig sind. Deshalb wählen wir das Dreieck so, dass seine Hypotenuse die Länge 1.

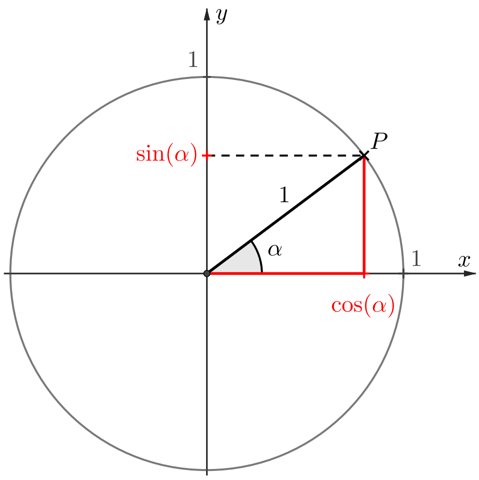
Wir zeichnen das Dreieck nun so, dass

- die Ankathete des betrachteten Winkels α auf der x-Achse liegt,
- der Winkel α selbst im Ursprung anliegt und
- die Hypotenuse im ersten Quadranten liegt.

In diesem Koordinatensystem ist das Dreieck nun eindeutig durch den Punkt P auf dem Einheitskreis bestimmt:

> $\cos(\alpha)$ ist die Projektion von P auf die x-Achse und $\sin(\alpha)$ ist die Projektion von P auf die y-Achse, siehe Abb. 1.

Abbildung 1: Das rechtwinklige Dreieck im Koordinatensystem



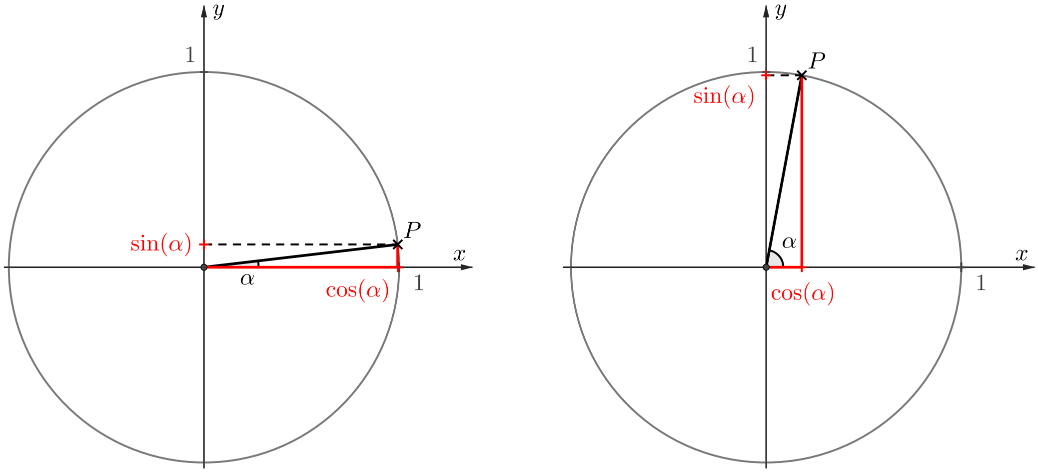
Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 1. September 2023

2 Sinus und Kosinus für Winkel $\alpha \geq 0°$

2.1 $\alpha = 0°$ und $\alpha = 90°$

Für $\alpha = 0°$ und $90°$ ist es nicht mehr sinnvoll von einem Dreieck zu sprechen. Deshalb sehen wir uns die Situation in Abb. 2 an:

Abbildung 2: $\alpha = 0°$ und $\alpha = 90°$



Hier sieht man, dass für immer kleinere Winkel der Sinus immer kleiner wird und der Kosinus fast 1 ist. Ebenso sieht man, dass für Winkel nahe $90°$ der Sinus nahe 1 liegt und der Kosinus immer kleiner wird.

Deshalb ist es sinnvoll folgende Werte zu setzen:

$$\boxed{\sin(0°) = 0\,, \quad \cos(0°) = 1\,, \quad \sin(90°) = 1\,, \quad \cos(90°) = 0\,.}$$

2.2 $90 < \alpha < 180°$ und $\alpha = 180°$

Wir gehen jetzt und in den kommenden Fällen so vor, wie wir es auf der ersten Seite festgelegt haben: Der Punkt P auf dem Einheitskreis legt $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ fest, indem $\cos(\alpha)$ die Projektion von P auf die x-Achse und $\sin(\alpha)$ die Projektion von P auf die y-Achse ist.

Damit ist im Fall $90 < \alpha < 180°$ insbesondere $\cos(\alpha) < 0$. Das zugehörige rechtwinklige Dreieck hat den Winkel $\beta = \alpha - 90°$, siehe Abb. 3

Vergleicht man die Längen miteinander, so ergibt sich:

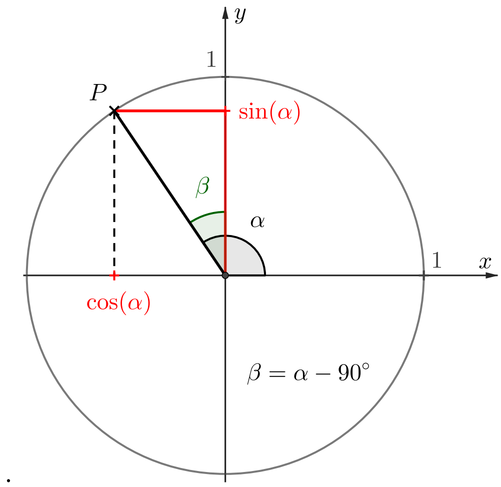
$$\sin(\alpha) = \cos(\beta) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = -\sin(\beta)$$

oder

$$\boxed{\sin(\alpha) = \cos(\alpha - 90°)\,, \qquad \cos(\alpha) = -\sin(\alpha - 90°)}$$

Zur Untersuchung von $\alpha = 180°$ bemerken wir ähnlich wie zuvor, dass der Kosinus nahe -1 ist und der Sinus immer kleiner wird, wenn α nahe $180°$ ist. Deshalb setzen

Abbildung 3: $90 < \alpha < 180°$



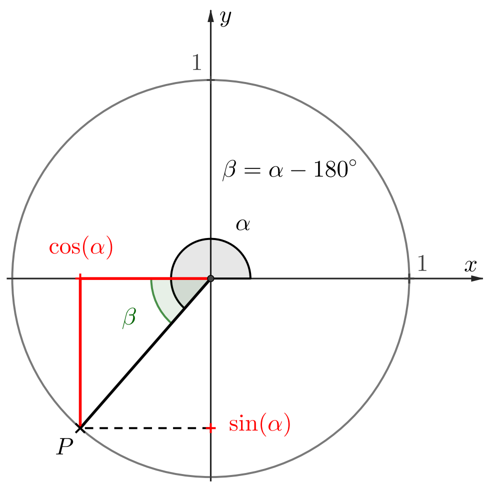
wir

$$\boxed{\sin(180°) = 0\,, \quad \cos(180°) = -1\,.}$$

2.3 $180 < \alpha < 270°$ und $\alpha = 270°$

In diesem Fall sind $\sin(\alpha) < 0$ und $\cos(\alpha) < 0$. Das zugehörige rechtwinklige Dreieck hat dann den Winkel $\beta = \alpha - 180°$, siehe Abb. 4.

Abbildung 4: $180 < \alpha < 270°$



Vergleicht man wieder die Längen miteinander, so ergibt sich:

$$\sin(\alpha) = -\sin(\beta) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = -\cos(\beta)$$

oder

$$\boxed{\sin(\alpha) = -\sin(\alpha - 180°)\,, \qquad \cos(\alpha) = -\cos(\alpha - 180°)}$$

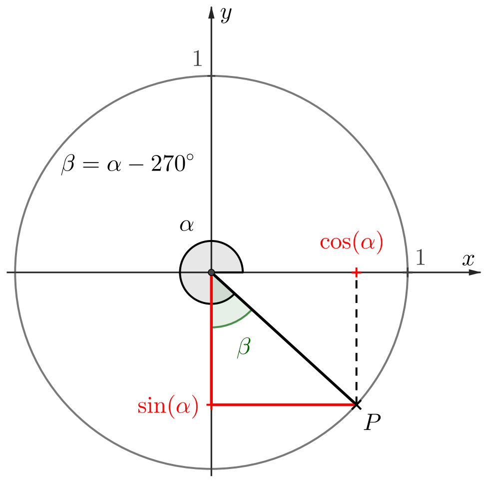
Zur Untersuchung von $\alpha = 270°$ sehen wir, dass der Sinus nahe -1 ist und der Kosinus immer kleiner wird, wenn α nahe $270°$. Deshalb setzen wir

$$\boxed{\sin(270°) = -1\,, \quad \cos(270°) = 0\,.}$$

2.4 $270 < \alpha < 360°$ und $\alpha = 360°$

In diesem Fall ist $\sin(\alpha) < 0$. Das zugehörige rechtwinklige Dreieck hat dann den Winkel $\beta = \alpha - 270°$, siehe Abb. 5.

Abbildung 5: $180 < \alpha < 270°$



Vergleicht man auch hier die Längen miteinander, so ergibt sich:

$$\sin(\alpha) = -\cos(\beta) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = \sin(\beta)$$

oder

$$\boxed{\sin(\alpha) = -\cos(\alpha - 270°)\,, \qquad \cos(\alpha) = \sin(\alpha - 270°)}$$

Der Fall $\alpha = 360°$ wird behandelt wie die vorigen Spezialfälle: der Sinus wird immer kleiner und der Kosinus ist nahe 1, wenn α nahe $360°$ ist, also

$$\boxed{\sin(360°) = 0\,, \quad \cos(360°) = 1\,.}$$

2.5 $\alpha > 360°$

Wenn wir einen Winkel haben, der größer als $360°$ ist, dann sehen wir, dass die geometrische Situation im Koordinatensystem wiederholt. Wir können von dem Winkel so lange $360°$ abziehen, bis wir einen Winkel bekommen, der zwischen $0°$ und $360°$ liegt: der Punkt P ist dann der gleiche!

Also haben wir:

$$\boxed{\sin(\alpha) = \sin(\alpha - n \cdot 360°)\,, \qquad \cos(\alpha) = \cos(\alpha - n \cdot 360°)}$$

2.6 Zusammenfassung

Um den Sinus und den Kosinus für Winkel zu berechnen, die zwischen $0°$ und $360°$ liegen, reicht es

- die Werte für $0 < \alpha < 90°$ zu kennen, wie wir sie in *Trigonometrie Teil 1* am rechtwinkligen Dreieck erarbeitet haben,

und zusätzlich noch

- $\sin(0°) = 0$ und $\cos(0°) = 1$.

Dazu schreiben wir die obigen Formeln etwas um:

1) $\sin(\alpha + 90°) = \cos(\alpha) \quad$ und $\quad \cos(\alpha + 90°) = -\sin(\alpha)$

2) $\sin(\alpha + 180°) = -\sin(\alpha) \quad$ und $\quad \cos(\alpha + 180°) = -\cos(\alpha)$

3) $\sin(\alpha + 270°) = -\cos(\alpha) \quad$ und $\quad \cos(\alpha + 270°) = \sin(\alpha)$

Um den Sinus und Kosinus für alle Winkel $\geq 0°$ zu berechnen, nutzen wir zusätzlich zu den Formeln 1-3 noch

4) $\sin(\alpha + n \cdot 360°) = \sin(\alpha) \quad$ und $\quad \cos(\alpha + n \cdot 360°) = \cos(\alpha)$

3 Sinus und Cosinus für Winkel $\alpha < 0°$

Auch wenn es zunächst geometrisch wenig sinnvoll erscheint sich mit negativen Winkeln zu beschäftigen, können wir aus mathematischer Sicht sehr einfach auch diese Winkel behandeln.

Dazu muss man nur die Formel 4 von oben konsequent anwenden: Ist ein Winkel negativ, dann müssen wir nur oft genug $360°$ darauf addieren, um einen positiven Winkel zu bekommen. Das gibt uns dann den Sinus und den Kosinus dieses Winkels, z. B.

- $\sin(-40°) = \sin(-40° + 360°) = \sin(320°)$
- $\cos(-1335°) = \cos(-1335 + 4 \cdot 360°) = \cos(105°)$

Zusätzlich zu 1-4 kennen wir aus *Trigonometrie Teil 2* noch die Beziehungen

5) $\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha) \quad$ und $\quad \cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$

Mit etwas Aufwand kann man damit zeigen, dass

6) $\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \qquad \text{und} \qquad \cos(-x) = \cos(x)}$

für alle Winkel gilt. Z. B.

- $\sin(-20°) \overset{4.}{=} \sin(-20° + 360°) = \sin(340°) \overset{3.}{=} -\cos(70°) \overset{5.}{=} -\sin(20°)$
- $\cos(-1335°) \overset{4.}{=} \cos(-1335 + 4 \cdot 360°) = \cos(105°) \overset{1.}{=} -\sin(15°) \overset{5.}{=} -\cos(75°) \overset{2.}{=} \cos(255°) \overset{4.}{=} \cos(255 + 3 \cdot 360°) = \cos(1335°)$

Auch geometrisch lassen sich negative Winkel interpretieren. Wir haben unsere positiven Winkel α bisher immer von der positiven x-Achse gegen den Uhrzeigersinn in Richtung der Hypotenuse gemessen, sieh Abb. 6 links. Negative Winkel werden nun von der positiven x-Achse mit dem Uhrzeigersinn in Richtung der Hypotenuse gemessen, siehe Abb. 6 rechts.

Wenn wir das so machen und wie in Abschnitt 2 vorgehen, dann ergibt sich die Formel 6 zwangsläufig, wie man durch Vergleich der beiden Skizzen in Abb. 6 sieht.

Abbildung 6: Positive und negative Winkel messen