Frank Klinker

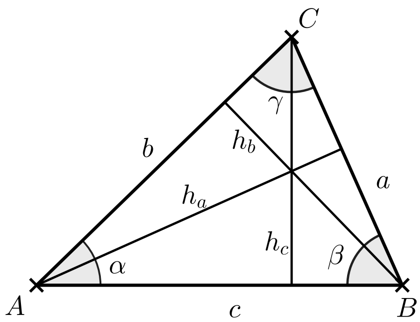
Trigonometrie

Teil 4: Sinussatz und Kosinussatz am allgemeinen Dreieck

1 Der Sinussatz

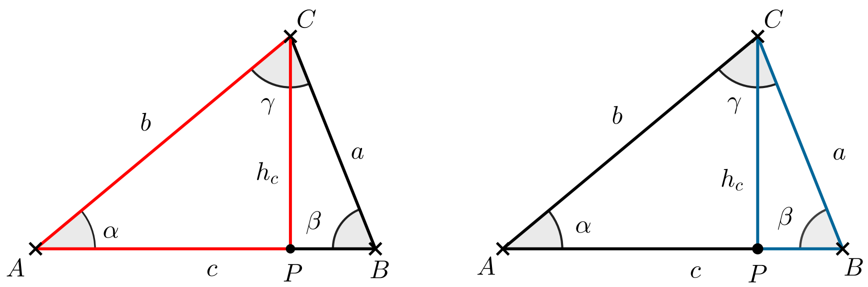
Bisher haben wir uns rechtwinklige Dreiecke angesehen und wenden uns nun allgemeinen Dreiecken zu. Unsere Bezeichnungen an einem Dreieck sind dabei wie folgt: Die Namen der Eckpunkte sind große lateinische Buchstaben, z. B. A. Die einer Ecke gegenüberliegende Seite bekommt den Namen der Ecke aber mit kleinem lateinischen Buchstaben, z. B. a. Der Winkel an einer Ecke bekommt den Namen der Ecke aber mit kleinem griechischen Buchstaben, z. B. α. Die Höhe auf eine Seite erhält den Namen h und als Index den Namen der Seite, z. B. h_a, siehe Abb. 1.

Abbildung 1: Die Bezeichnungen am allgemeinen Dreieck



Wir nehmen aus diesem Dreieck zwei Höhen heraus und behalten lediglich eine, etwa h_c. Dann zerlegt diese Höhe unser Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke: zum einen das rote $\triangle(APC)$ und zum anderen das blaue $\triangle(PBC)$ in Abb. 2.

Abbildung 2: Spezielle rechtwinklige Dreiecke (1)



Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 14. September 2023

In dem roten Dreieck ist b die Hypotenuse, weil bei P der rechte Winkel liegt. Damit gilt hier

$$\frac{h_c}{b} = \sin(\alpha) \iff h_c = b\sin(\alpha)\,.$$

In dem blauen Dreieck ist aus dem gleichen Grund a die Hypotenuse. Deshalb gilt hier

$$\frac{h_c}{a} = \sin(\beta) \iff h_c = a\sin(\beta)\,.$$

Beide Gleichungen sind bereits nach h_c aufgelöst und wir können sie gleichsetzen. Das gibt

$$a\sin(\beta) = b\sin(\alpha) \iff \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

Statt mit der Höhe h_c zu beginnen, können wir die gleichen Rechnungen mit der Höhe h_b oder der Höhe h_a machen. Wir erhalten dann die Gleichungen

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad \text{und} \quad \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}\,.$$

Wir fassen dieses Ergebnis zusammen:

Sinussatz

In einem allgemeinen Dreieck, wie in Abb. 1 gelten die folgende Beziehung zwischen den Seiten und Winkeln

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Bemerkung 1. 1. Der Sinussatz ist geeignet, wenn in einem Dreieck zwei Winkel und eine Seite gegeben sind[1]: dann lassen sich die fehlenden Seiten berechnen.[2]

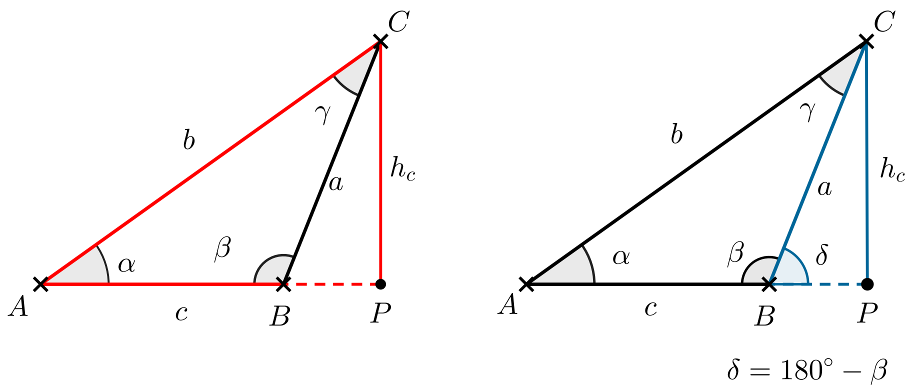
2. Der Sinussatz ist ebenfalls geeignet, wenn in einem Dreieck zwei Seiten gegeben sind und ein Winkel, der nicht der eingeschlossene Winkel ist: dann lassen sich die fehlenden Winkel und Seiten berechnen.[3]

Unsere Argumentation beschränkt sich bisher auf spitzwinklige Dreiecke, also $\alpha, \beta, \gamma < 90°$. Dennoch gilt der Sinussatz auch in stumpfwinkligen Dreiecken. Dazu sehen wir uns die Situation in einem solchen Dreieck genauer an. Der Höhenfußpunkt P liegt nun nicht mehr innerhalb des Dreiecks. Daher müssen wir die Seite c etwas verlängern, um unsere rechtwinkligen Dreiecke wiederzufinden, siehe Abb. 3.

Die Formel für das rote Dreieck $\triangle(APC)$ bleibt die gleiche, wie im spitzwinkligen Dreieck, nämlich $\frac{h_c}{b} = \sin(\alpha)$. Im blauen Dreieck $\triangle(PBC)$ sieht das jetzt etwas anders aus, da der Winkel δ hier die Rolle von β übernimmt. Aber auch das beeinflusst

[1] Kennt man zwei Winkel, dann kennt wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ auch den dritten.
[2] Das ist eng mit den Kongruenzsätzen WSW und SWW verbunden.
[3] Das ist eng mit dem Kongruenzsatz SSW verbunden.

Abbildung 3: Spezielle rechtwinklige Dreiecke (2)



das Ergebnis von oben nicht:

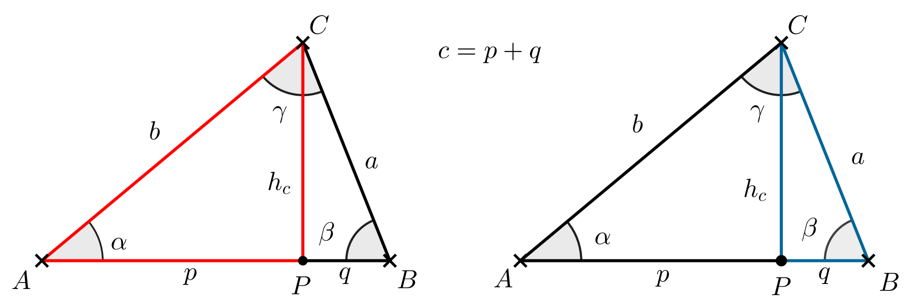
$$\frac{h_c}{a} = \sin(\delta) = \sin(180^\circ - \beta) = \sin(\beta).$$

Ab jetzt ist die Argumentation die gleiche wie im Fall des spitzwinkligen Dreiecks.

2 Der Kosinussatz

Wir zerlegen wie zuvor unser Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke mit Hilfe einer Höhe, etwa h_c. Zusätzlich zerlegen wir die Seite c in die zwei Teilstücke die sich durch den Höhenfußpunkt ergeben: $|AP| = p$ und $|BP| = q$ mit $c = p + q$, siehe Abb. 4

Abbildung 4: Spezielle rechtwinklige Dreiecke (3)



Im roten Dreieck $\triangle(APC)$ gelten

$$\frac{h_c}{b} = \sin(\alpha) \iff h_c = b\sin(\alpha)\,,$$
$$\frac{p}{b} = \cos(\alpha) \iff p = b\cos(\alpha)\,.$$

Im blauen Dreieck $\triangle(PBC)$ gilt der Satz von Pythagoras:

$$a^2 = q^2 + h_c^2\,.$$

Die ersten beiden Formeln nutzen wir jetzt geschickt und setzen sie in die dritte ein:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= q^2 + h_c^2 \\
&= (c-p)^2 + h_c^2 \\
&= c^2 - 2cp + p^2 + h_c^2 \\
&= c^2 - 2cb\cos(\alpha) + b^2\cos^2(\alpha) + b^2\sin^2(\alpha) \\
&= c^2 - 2bc\cos(\alpha) + b^2\big(\underbrace{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}_{=1}\big)
\end{aligned}
$$

also

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

Auch hier können wir statt mit der Höhe h_c unsere Rechnungen mit einer der anderen Höhen beginnen. Dann erhalten wir zwei Formeln, die genau wie die obige aussehen, aber mit vertauschten Rollen der Seiten und Winkel:

Kosinussatz

In einem allgemeinen Dreieck, wie in Abb. 1 gelten die folgende Beziehung zwischen den Seiten und den Winkeln

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)
\end{aligned}
$$

Bemerkung 2. 1. Ist das Dreieck rechtwinklig, etwa $\gamma = 90°$, dann bekommen wir wegen $\cos(90°) = 0$ den Satz von Pythagoras zurück.

2. Der Kosinussatz ist geeignet, wenn in einem Dreieck alle drei Seiten gegeben sind: dann lassen sich die Winkel berechnen.[4]

3. Der Kosinussatz ist auch geeignet, wenn in einem Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind: dann lassen sich die fehlende Seite und die fehlenden Winkel berechnen.[5]

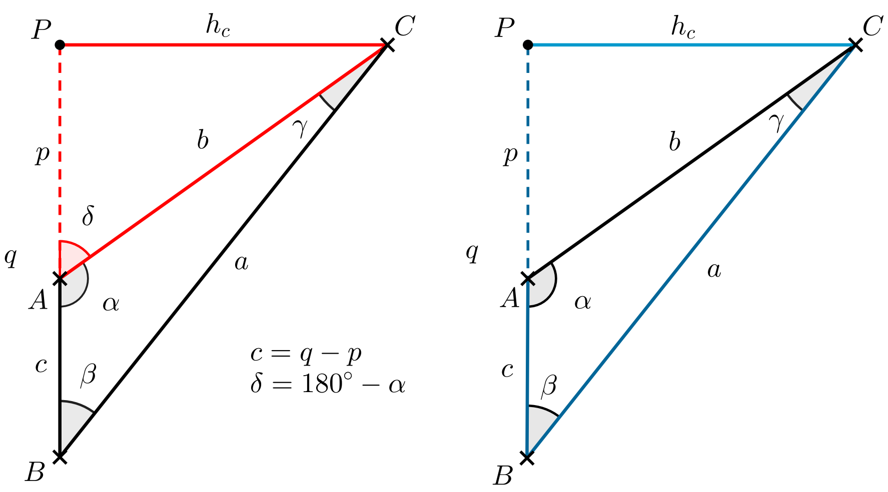
Auch hier beruht unsere Argumentation bisher auf spitzwinkligen Dreiecken, also $\alpha, \beta, \gamma < 90°$. Im Fall eines rechtwinkligen Dreiecks liegen Höhenfußpunkte wieder außerhalb des Dreiecks. Daher müssen wir die entsprechende Dreiecksseite nicht aufteilen, sondern verlängern, siehe Abb. 5.

Die Formeln im roten Dreieck $\triangle(APC)$ lauten nun

$$
\begin{aligned}
\frac{h_c}{b} &= \sin(\delta) = \sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha) \iff h_c = b\sin(\alpha)\,, \\
\frac{p}{b} &= \cos(\delta) = \cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha) \iff p = -b\cos(\alpha)\,.
\end{aligned}
$$

[4] Das ist eng mit dem Kongruenzsatz SSS verbunden.
[5] Das ist eng mit dem Kongruenzsatz SWS verbunden.

Abbildung 5: Spezielle rechtwinklige Dreiecke (4)



Im blauen Dreieck $\triangle(PBC)$ gilt wieder $a^2 = q^2 + h_c^2$ und deshalb

$$\begin{aligned} a^2 &= q^2 + h_c^2 \\ &= (c+p)^2 + h_c^2 \\ &= c^2 + 2cp + p^2 + h_c^2 \\ &= c^2 - 2cb\cos(\alpha) + b^2\cos^2(\alpha) + a^2\sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

Ab dieser Stelle geht es genauso weiter wie oben und wir kommen zum gleichen Resultat.