Frank Klinker

Steckbriefaufgaben und ihre ”Vokabeln”

1 Was ist eine Steckbriefaufgabe?

Unter einer **Steckbriefaufgabe** versteht man eine Aufgabe, bei der man die spezielle Gestalt einer Funktion herleiten soll.

Dazu sind mehrere, in einem Text codierte Informationen zu verwenden.

Die erhaltene Funktion muss dann alle im Text beschriebenen Eigenschaften erfüllen.

Das Vorgehen ist in der Regel wie folgt:

① Gib die gesuchte Funktion in ihrer allgemeinen Form an.

② Die Anzahl der freien Parameter in der allgemeinen Darstellung der Funktion bestimmt im Wesentlichen die Anzahl der notwendigen Bedingungen.

③ Extrahiere die Bedingungen aus dem Text der Steckbriefaufgabe.

④ Mit Hilfe der Bedingungen stelle ein Gleichungssystem auf.

⑤ Löse dieses Gleichungssystem.

Bemerkung 1. Typische Funktionenklassen, die auf diese Art bearbeitet werden, sind etwa die folgenden:

- **ganzrationale Funktionen** ($k+1$ Parameter)

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

  Ist $a_k \neq 0$, dann heißt k **der Grad** der ganzrationalen Funktion. Z. B.

  ▷ Gerade/lineare Funktion = ganzrationale Funktion vom Grad 1 (2 Parameter)

$$f(x) = mx + b$$

  ▷ Parabel/quadratische Funktion = ganzrationale Funktion vom Grad 2 (3 Parameter)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 16. Dezember 2024

- ▷ kubische Funktion = ganzrationale Funktion vom Grad 3 (4 Parameter)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

- ▷ ganzrationale Funktion vom Grad 4 (5 Parameter)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

- Exponentialfunktion (2 Parameter)

$$f(x) = c\,\mathrm{e}^{ax}$$

- Logarithmusfunktion und trigonometrische Funktionen mit linearem Argument (3 Parameter)[1]

$$\begin{aligned} &f(x) = a\ln(bx+c) \\ &f(x) = a\sin(bx+c),\ f(x) = a\cos(bx+c) \\ &f(x) = a\tan(bx+c),\ f(x) = a\cot(bx+c) \end{aligned}$$

- Produkte aus Funktionen vom obigem Typ. Z. B.

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{\mathrm{cx}} \qquad \text{(3 Parameter)}$$

- Quotienten von Funktion vom obigen Typ. Z. B.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{x+b} && \text{(2 Parameter)} \\ f(x) &= \frac{ax+b}{x^2+cx+d} && \text{(4 Parameter)} \\ f(x) &= \frac{b\mathrm{e}^{\mathrm{ax}}}{x+c} && \text{(3 Parameter)} \end{aligned}$$

Welche Funktionentypen wichtig sind, ergibt sich aus der Diskussion im Unterricht!

Bemerkung 2.
- Im Fall ganzrationaler Funktionen ist das Gleichungssystem, das man aus den Bedingungen erhält, ein **lineares Gleichungssystem**. Dieses lässt sich dann systematisch lösen.
- Bei Aufgaben mit allgemeineren Funktionen ist das Gleichungssystem typischerweise nicht linear. Ein generelles Vorgehen zum Lösen gibt es in der Regel nicht.

Bemerkung 3.
- Nachdem man die Parameter der Funktion mit Hilfe einer Lösung des Gleichungssystems bestimmt hat, bleibt in der Regel die Frage offen, ob unsere erhaltene Funktion die einzige ist, die dem Steckbrief genügt.

  Diese Frage ist auch nicht immer einfach zu beantworten!
- Zumindest für eine sehr wichtige Klasse von Funktionen kann man diese Frage teilweise beantworten:

[1]Man könnte einwenden, dass auch hier die Exponentialfunktion bearbeitet werden kann. Dass das nicht so ist, sieht man wie folgt: Wegen der Potenzgesetze ist $a\mathrm{e}^{\mathrm{bx+c}} = \mathrm{ae}^{\mathrm{c}}\mathrm{e}^{\mathrm{bx}} = \mathrm{de}^{\mathrm{bx}}$, wobei wir $d = a\mathrm{e}^{\mathrm{b}}$ zusammengefasst haben. Somit gibt es hier tatsächlich nur zwei statt drei Parameter.

Sind in einer Steckbriefaufgabe $k + 1$ Bedingungen codiert und erhält man mit den zugehörigen $k + 1$ Gleichungen eine **ganzrationale Funktion** mit einem Grad kleiner oder gleich k, dann ist diese eindeutig.

Man achte auf die genaue Formulierung dieser Aussage!

- Einerseits kann die gefundene eindeutige ganzrationale Funktion einen Grad haben, der kleiner ist als die vorgegebene Gleichungsanzahl vermuten lässt
- Andererseits gibt es viele ganzrationale Funktionen mit Grad größer als k, die ebenfalls alle $k + 1$ Bedingungen erfüllen.

2 Ein Vokabelheft für Steckbriefaufgaben

2.1 Bedingungen an einzelne Punkte

	Vokabeltext	Anz. Bed.	nutzbare mathematische Bedingung
A1	• Der Graph verläuft durch den Punkt (x_0/y_0) • Der Punkt (x_0/y_0) liegt auf dem Graphen	1	$f(x_0) = y_0$
A2	• Der Graph hat in x_0 eine Nullstelle • Der Graph schneidet die x-Achse in x_0	1	$f(x_0) = 0$
A3	• Der Graph schneidet die y-Achse in y_0 • Die Funktion hat den y-Achsenabschnitt y_0	1	$f(0) = y_0$
A4	• Der Graph verläuft durch den Koordinatenursprung	1	$f(0) = 0$
B1	• Der Graph hat an der Stelle x_0 die Steigung m • Die Tangente an den Graphen an der Stelle x_0 hat die Steigung m	1	$f'(x_0) = m$
B2	• Der Graph hat im Punkt (x_0/y_0) die Steigung m • Die Tangente an den Graphen im Punkt (x_0/y_0) hat die Steigung m	2	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$
B3	• Die Tangente an den Graphen an der Stelle x_0 hat die Form $t(x) = mx + b$	2	$f(x_0) = mx_0 + b$ $f'(x_0) = m$
B4	• Die Tangente an den Graphen an der Stelle x_0 ist parallel zur x-Achse • Der Graph hat an der Stelle x_0 eine waagerechte Tangente	1	$f'(x_0) = 0$
B5	• Die Tangente an den Graphen im Punkt (x_0/y_0) ist parallel zur x-Achse	2	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$
B6	• An der Stelle x_0 berührt die Funktion/der Graph die x-Achse • Die x-Achse ist an der Stelle x_0 die Tangente an den Graphen	2	$f(x_0) = 0$ $f'(x_0) = 0$

C1	• Die Stelle x_0 ist eine Extremstelle/Maximalstelle/Minimalstelle der Funktion/des Graphen • Die Funktion/der Graph hat an der Stelle x_0 ein Extrempunkt/Maximum/Minimum	1*	$f'(x_0) = 0$
C2	• Der Punkt (x_0/y_0) ist ein Extrempunkt/Maximum/Minimum der Funktion/des Graphen	2*	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$
D1	• Die Stelle x_0 ist eine Wendestelle der Funktion/des Graphen • An der Stelle x_0 ändert sich die Krümmungsrichtung des Graphen von $f(x)$ • An der Stelle x_0 ist die Steigung von $f(x)$ extremal	1*	$f''(x_0) = 0$
D2	• Der Punkt (x_0/y_0) ist ein Wendepunkt der Funktion/des Graphen • Im Punkt (x_0/y_0) ändert sich die Krümmungsrichtung des Graphen von $f(x)$ • Im Punkt (x_0/y_0) ist die Steigung von $f(x)$ extremal	2*	$f(x_0) = y_0$ $f''(x_0) = 0$
D3	• Die Tangente des Graphen an der Wendestelle x_0 hat die Steigung m • Die Wendetangente des Graphen an der Stelle x_0 hat die Steigung m	2*	$f'(x_0) = m$ $f''(x_0) = 0$
D4	• Die Tangente des Graphen im Wendepunkt (x_0/y_0) hat die Steigung m • Die Wendetangente des Graphen im Punkt (x_0/y_0) hat die Steigung m	3*	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$ $f''(x_0) = 0$
D5	• Die Tangente des Graphen an der Wendestelle x_0 hat die Form $t(x) = mx + b$ • Die Wendetangente des Graphen an der Stelle x_0 hat die Form $t(x) = mx + b$	3*	$f(x_0) = mx_0 + b$ $f'(x_0) = m$ $f''(x_0) = 0$
E1	• Die Stelle x_0 ist eine Sattelstelle der Funktion/des Graphen	2*	$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$

E2	• Der Punkt (x_0/y_0) ist ein Sattelpunkt der Funktion/des Graphen	3*	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$

Bemerkung 4. In den Punkten C1 bis E2 sind die nutzbaren Bedingungen üblicherweise nicht geeignet, die sprachliche Formulierung des Vokabeltextes exakt abzubilden.

Dazu sind weitere Bedingungen notwendig, die jedoch in der Regel nicht dazu genutzt werden können, die Parameter zu bestimmen.

Z. B. benötigt die weitere Eingrenzung des Extremums in den Punkten C1 und C2 eine Untersuchung mit Hilfe des Vorzeichenwechselkriteriums oder einer Untersuchung mit Hilfe der zweiten Ableitung: so bedeutet $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dass ist die Extremalstelle x_0 eine Minimalstelle ist. Da die weitere Bedingung eine Ungleichung darstellt, ist sie nicht direkt verwertbar.

2.2 Symmetriebedingungen

F1	• Die Funktion/der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse	$f(x) = f(-x)$
F2	• Die Funktion/der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung	$f(x) = -f(-x)$
F3	• Die Funktion/der Graph ist achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = x_0$	$f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$
F4	• Die Funktion/der Graph ist punktsymmetrisch zum Punkt (x_0/y_0)	$f(x_0 + x) - y_0$ $= y_0 - f(x_0 - x)$

Bemerkung 5. In den Symmetriebetrachtungen gibt es keine spezielle Zahl an Bedingungen. Genau genommen handelt es sich hier um unendlich viele Bedingungen.

Für die beiden Symmetriebedingungen F1 und F2 hat das z. B. die folgenden Konsequenzen:

1. Zu jeder Bedingung an einer Stelle $x = x_0$ mit $x_0 \neq 0$ erhält man eine weitere hinzu. Z. B.
   - Verläuft der Graph einer gesuchten Funktion durch den Punkt (x_0/y_0), so verläuft er auch durch den Punkt $(-x_0/y_0)$ im Fall F1 oder durch $(-x_0/-y_0)$ im Fall F2.
   - Hat eine Funktion an der Stelle $x = x_0$ ein Maximum, so hat sie an der Stelle $x = -x_0$ ein Maximum im Fall F1 oder ein Minimum im Fall F2.
2. Ist die gesuchte Funktion ganzrational, so gilt:

F1 Die ganzrationale Funktion hat einen geraden Grad und es treten nur gerade Exponenten auf. Z. B.

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

Die Anzahl der Parameter wird also fast halbiert.

F2 Die ganzrationale Funktion hat einen ungeraden Grad und es treten nur ungerade Exponenten auf. Z. B.

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

Die Anzahl der Parameter wird also halbiert. Insbesondere verläuft der Graph durch den Ursprung (0/0), der gleichzeitig ein Wendepunkt ist.

3. Erfüllt eine Funktion $f(x)$ die Symmetriebedingung F1 (bzw. F2), so gilt für die Ableitung $f'(x)$ die Symmetriebedingung F2 (bzw. F1).

   Das pflanzt sich auf die höheren Ableitungen fort:

   $$\text{Für } f(x) \text{ gilt F1} \longrightarrow \text{für } f'(x) \text{ gilt F2} \longrightarrow \text{für } f''(x) \text{ gilt F1} \longrightarrow \text{usw.}$$

   oder

   $$\text{Für } f(x) \text{ gilt F2} \longrightarrow \text{für } f'(x) \text{ gilt F1} \longrightarrow \text{für } f''(x) \text{ gilt F2} \longrightarrow \text{usw.}$$

3 Beispielaufgaben

Aufgabe 6. Bestimme die Normalform einer Geraden, die durch den Punkte $(4/2)$ verläuft und die y-Achse in $y = 10$ schneidet.

Aufgabe 7. Bestimmen Sie die Normalform einer Parabel, die durch $(4/25)$ verläuft und in $(-1/50)$ ihr Extremum besitzt.

Aufgabe 8. Geben Sie eine ganzrationale Funktion dritten Grades an, deren Graph durch den Koordinatenursprung geht, bei $x = 1$ ein Minimum und im Punkt $(\frac{2}{3}/\frac{2}{27})$ einen Wendepunkt hat.

Aufgabe 9. Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion vierten Gerades, die symmetrisch zur y-Achse ist, in $(1/4)$ einen Hochpunkt besitzt und die y-Achse in $y = 1$ schneidet.

Aufgabe 10. Der Graph einer Funktion habe die Form $f(x) = a\mathrm{e}^{\mathrm{cx}}$. Bestimmen Sie $f(x)$ so, dass ihr Graph durch die Punkte $(2/4)$ und $(5/200)$ verläuft.

Aufgabe 11. Bestimmen Sie $f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{\mathrm{cx}}$ mit den folgenden Eigenschaften: Ihr Graph hat im Punkt $(0/2)$ ein Extremum und verläuft durch den Punkt $\left(1/\frac{4}{\mathrm{e}}\right)$.

Aufgabe 12. Bestimmen Sie eine Funktion vom Typ $f(x) = \dfrac{ax + b}{x^2 + c}$, sodass ihr Graph durch die Punkte $(0/1)$ und $(1/1)$ verläuft und an der Stelle $x = -1$ eine waagerechte Tangente hat.
$\left(\textit{Hinweis:}\ \ f'(x) = \dfrac{-ax^2 - 2bx + ac}{(x^2 + c)^2}\right)$