Frank Klinker

Zusammenfassung: Der schräge Wurf / Die Wurfparabel

1 Vorbemerkungen

1.1 Überlagerung von Bewegungen

Fakten 1.

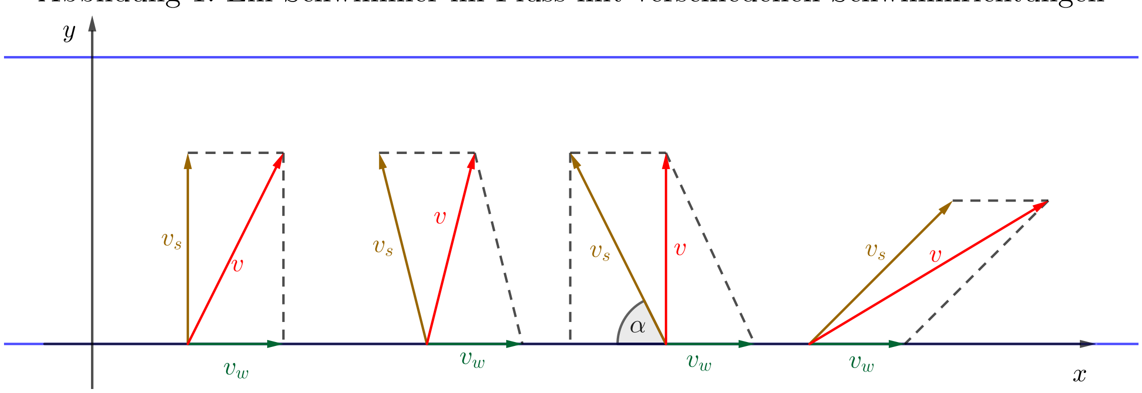
- Setzt sich eine Bewegung aus mehreren verschiedenen Bewegungen zusammen, so überlagern sich diese zu einer gemeinsamen Bewegung.
- Dabei "stören" sich die einzelnen Bewegungen gegenseitig nicht.

Beispiel 2. Zwei typische Beispiele einfacher Bewegungsüberlagerungen sind 1) die Bewegung eines Schwimmers in einem Fluss und 2) die Bewegung einer Laufkatze z. B. in einem Containerterminal.

1) Wenn man in einem Fluss schwimmt, dann merkt man, dass die tatsächliche Bewegung nicht mit der eigenen Schwimmrichtung übereinstimmt. Das liegt daran, dass der Fluss den Schwimmer ebenfalls bewegt.

   Nehmen wir an, dass der Schwimmer mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus schwimmt und der Fluss ebenfalls mit einer konstanten Geschwindigkeit fließt. Dann ist die resultierende Bewegung ebenfalls eine gleichförmige Bewegung. Die tatsächliche Geschwindigkeit v setzt sich dann vektoriell aus den zwei Geschwindigkeiten von Schwimmer und Fluss zusammen, siehe Abb. 1.

   Abbildung 1: Ein Schwimmer im Fluss mit verschiedenen Schwimmrichtungen

   Kennt man die Geschwindigkeit des Schwimmers, so kann man den Winkel bestimmen, unter dem der Schwimmer gegen die Strömung los schwimmen muss, um genau am entgegengesetzten Uferpunkt anzukommen. Mit ein wenig Trigonometrie sieht man, dass $\cos\alpha = \frac{v_w}{v_s}$.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

2) Die Bewegung des eines Containers, der an einem Kran in einem Containerterminal hängt setzt sich sogar aus drei Bewegungen zusammen. Die Bewegung auf den Schienen in x-Richtung, die Bewegung der Laufkatze in y-Richtung und die Bewegung des Hakens in z-Richtung, siehe Abb. 2 und Abb. 3

Abbildung 2: Die Zusammensetzung der Bewegung des Containerkrans

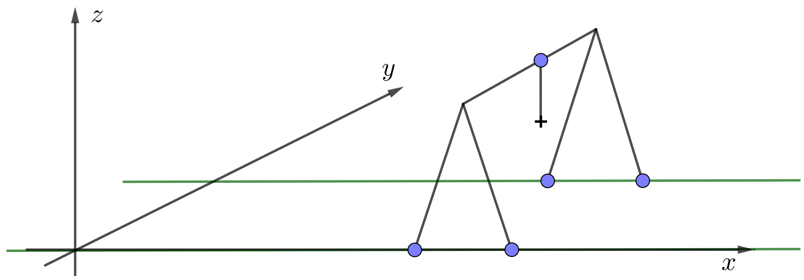
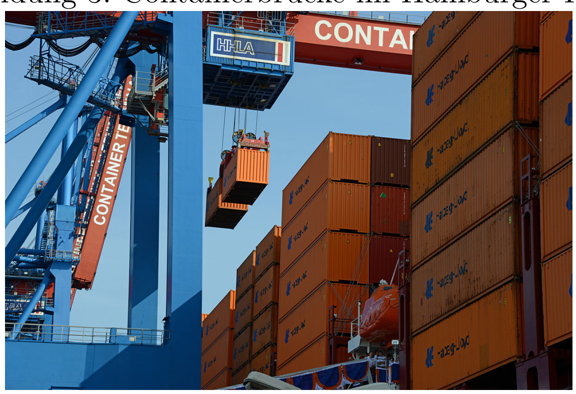


Abbildung 3: Containerbrücke im Hamburger Hafen



1.2 Wurf und Sprung

Fakten 3.

- Bei einem Sprung oder Wurf setzt sich die Bewegung aus einer Bewegung in horizontaler Richtung und einer vertikalen Bewegung in zusammen.
- Die horizontale Bewegung ist eine gleichförmige Bewegung.
- Die vertikale Bewegung ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Verabredung und Notation 4.

- Wir legen das xy-Koordinatensystem, das den Wurf/Sprung modelliert, in der Regel so, dass der Abwurf/Absprung-Punkt auf der y-Achse liegt.

Abwurfpunkt:	$(0/H)$
horizontale Abwurfgeschwindigkeit:	v_x
vertikale Abwurfgeschwindigkeit:	v_y

2 Zeitabhängigkeiten der Bewegungen

Es gelten folgende Zeitabhängigkeiten der beiden sich überlagernden Bewegungen:

Zeitabhängigkeit der horizontalen Bewegung:

$$x(t) = v_x\, t \tag{1}$$

Zeitabhängigkeit der vertikalen Bewegung:

$$y(t) = H + v_y\, t - \tfrac{1}{2} g\, t^2 \tag{2}$$

Bemerkung 5. Fassen wir $x(t)$ und $y(t)$ in einen Vektor zusammen, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} t}^{❶} - \overbrace{\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} t^2}^{❷} \tag{3}$$

In dieser Form lässt sich der Wurf wie folgt interpretieren: Er setzt sich zusammen aus:

❶ einer gleichförmigen Bewegung entlang einer Geraden mit Steigung $\frac{v_y}{v_x}$ durch den Punkt $(0/H)$,

❷ einem freien Fall.

Siehe dazu auch Bemerkung 6.

3 Die Wurfparabel / Zeitunahängige Beschreibung der Bewegung

Wir können aus den Gleichungen (1) und (2) die Zeit als Variable eliminieren und erhalten dann eine Beschreibung der Bewegung im xy-Koordinatensystem.

Dazu lösen wir Gleichung (1) nach t auf und setzen das Ergebnis in (2) ein. Das gibt dann die **Wurfparabel**, siehe auch Abb. 4 und Abb. 5.

- **Normalform der Wurfparabel**

$$y(x) = -\frac{g}{2\, v_x^2} \cdot x^2 + \frac{v_y}{v_x} \cdot x + H \tag{3a}$$

- **Scheitelpunktform der Wurfparabel**

$$y(x) = -\frac{g}{2\, v_x^2} \cdot \left(x - \frac{v_x v_y}{g}\right)^2 + H + \frac{v_y^2}{2\, g} \tag{3b}$$

- Spezielle Punkte der Wurfparabel:

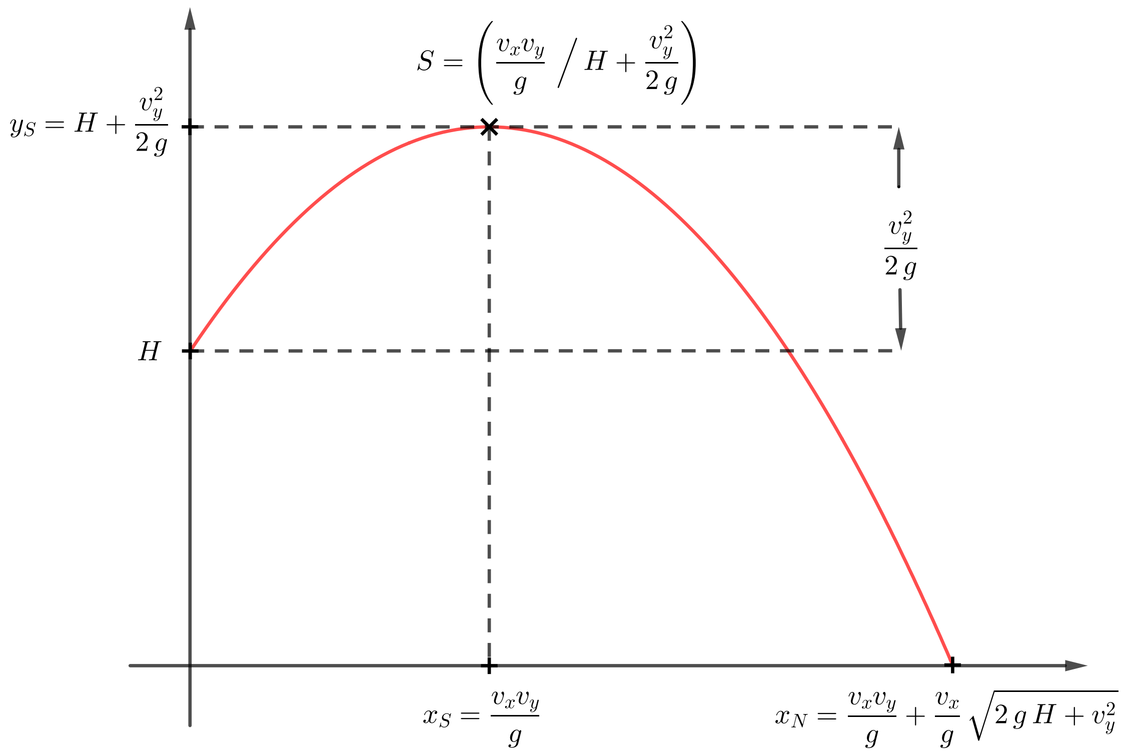
Scheitelpunkt: $S = \left(\frac{v_x v_y}{g} \;\middle/\; H + \frac{v_y^2}{2\,g} \right)$

positive Nullstelle: $x_N = \frac{v_x v_y}{g} + \frac{v_x}{g} \cdot \sqrt{2\,g\,H + v_y^2}$

Bemerkung 6. Wir können die Darstellung (3a) wie in Bemerkung 5 ebenfalls in einen linearen Anteil und einen quadratischen Anteil zerlegen. Insbesondere liest man hier auch die Steigung der Geraden ab:

$$y(x) \;=\; \overbrace{H + \frac{v_y}{v_x} \cdot x}^{❶} \;-\; \overbrace{\frac{g}{2\,v_x^2}}^{❷} \cdot x^2$$

Abbildung 4: Wurfparabel mit speziellen Punkten



Bemerkung 7.

- In Abbildung 5 ist die Wirkung des Abwurfwinkels auf die Form der Wurfparabel skizziert.

  Der Scheitelpunkt befindet sich vor dem Abwurfpunkt, stimmt mit diesem überein oder liegt hinter dem Abwurfpunkt, je nachdem, ob $v_y > 0$, $v_y = 0$ oder $v_y < 0$.

- In Abbildung 6 ist die Wirkung des Abwurfwinkels auf die Form der Wurfparabel bei fester y-Komponente der Abwurfgeschwindigkeit v_y.

  In Übereinstimmung mit der Berechnung des Scheitelpunktes sieht man, dass diese sich alle Scheitelpunkte auf einer Höhe befinden. Die Änderung von v_x bewirkt lediglich eine Verschiebung des Scheitelpunkts in horizontaler Richtung.

Das ist eine Folgerung aus der Tatsache, dass die Bewegung in x-Richtung diejenige in y-Richtung nicht beeinflusst. Als Konsequenz ergibt sich auch, dass die Zeiten, die bis zum erreichen des Scheitelpunktes und die Zeiten bis zum erreichen des Erdbodens bei all diesen Wurfparabeln gleich sind.

Praktisch sieht man das wie folgt: Wir nehmen alle vier Sprünge mit einer Kamera auf, die sich in horizontaler Richtung am Beckenrand mit der Geschwindigkeit v_x mit dem Springer mitbewegt. In den anschließenden Filmen kann man die Sprünge lediglich durch die Änderung des Hintergrundes auseinanderhalten; blendet man diesen aus, so sehen alle Sprünge aus, wie der Sprung mit $v_x = 0$.

Abbildung 5: Wurfparabeln mit unterschiedlichen Abwurfwinkeln

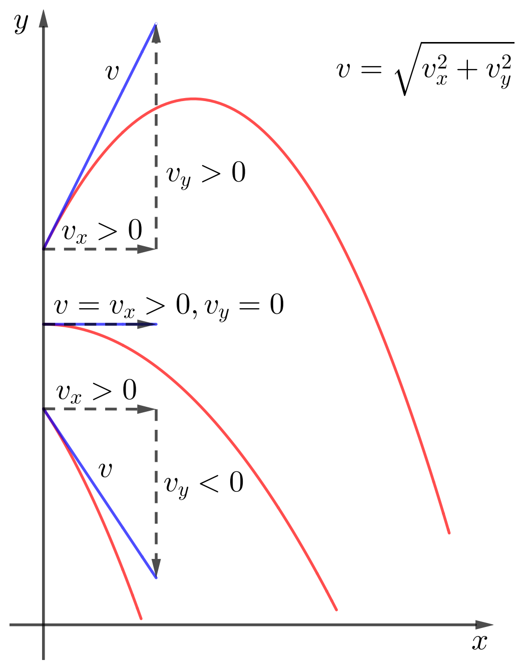


Abbildung 6: Wurfparabeln mit unterschiedlichen Anfangsgeschwindigkeiten v_x aber gleichem v_y

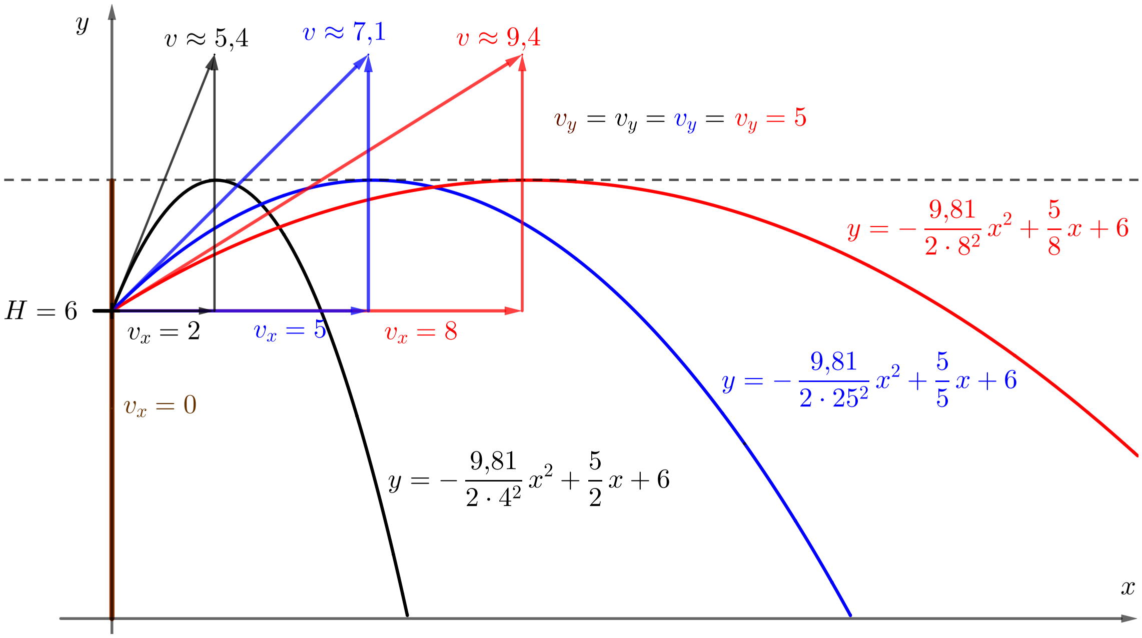


Abbildung 7: Sprungparabel als gute Näherung eines Weitsprungs (Quelle: Coldeportes Colombia, CC By-SA 2.5 CO)