Frank Klinker

Quadratische Gleichungen

Teil 1: Quadratwurzel und die Scheitelpunktform

1 Einführung und Wiederholung

Als wir angefangen haben uns mit Gleichungen zu beschäftigen, haben wir uns zunächst auf eine sehr einfache Gleichungsart beschränkt: die lineare Gleichung. Eine lineare Gleichung hat z. B. die Form

$$4x = 12\,.$$

Nicht jeder Gleichung hat man sofort angesehen, dass sie linear ist. Drei wichtige Typen von Umformungen, die nötig waren, um eine Gleichung zu vereinfachen und schließlich zu lösen, waren:

Typ ⓪: Forme beide Seiten der Gleichung um (durch Ausklammern, Zusammenfassen usw.)

Typ ①: Addiere oder subtrahiere auf beiden Seiten der Gleichung eine Zahl oder ein Vielfaches einer Potenz von x, (z. B. $-\,4$ oder $+\,3x$ oder $+\,14$ oder $-\,12x^4$)

Typ ②: Multipliziere oder dividiere beide Seiten der Gleichung mit einer Zahl (z. B. $\cdot\,13$ oder $:\,6$)

Wir erinnern uns daran, wie das ausführlich aussieht:

$$\begin{aligned}
3x^3 - 3x(x-1)(x+1) - x(x+4) - 7 &= x(2-x) + 8 && \big|\,⓪\\
3x^3 - 3x(x^2-1) - x^2 - 4x - 7 &= 2x - x^2 + 8 && \big|\,⓪\\
3x^3 - 3x^3 + 3x - x^2 - 4x - 7 &= 2x - x^2 + 8 && \big|\,⓪\\
-x - x^2 - 7 &= 2x - x^2 + 8 && \big|+x^2 \quad ①\\
-x - x^2 - 7 + x^2 &= 2x - x^2 + 8 + x^2 && \big|\,⓪\\
-x - 7 &= 2x + 9 && \big|-2x \quad ①\\
-x - 7 - 2x &= 2x + 8 - 2x && \big|\,⓪\\
-3x - 7 &= 8 && \big|+7 \quad ①\\
-3x - 7 + 7 &= 8 + 7 && \big|\,⓪\\
-3x &= 15 && \big|:(-3) \quad ②\\
-3x : (-3) &= 15 : (-3) && \big|\,⓪\\
x &= 5
\end{aligned}$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 7. Februar 2024

2 Die Scheitelpunktform als "einfachste" Form einer quadratischen Gleichung

2.1 Eine simple quadratische Gleichung

Wir starten mit einer sehr einfachen Gleichung, die aber sicher nicht linear ist:

$$(1) \quad \boxed{x^2 = 121}\,.$$

Diese Gleichung ist eine **quadratische Gleichung**, da die Variable hier nicht linear vorkommt, sondern quadratisch, d. h. mit der Potenz zwei.

Diese Gleichung zu lösen fällt uns nicht schwer: Wir müssen "nur" nach einer Zahl suchen, die mit sich selbst multipliziert 121 ergibt.

Hier fällt einem als Lösung sofort die 11 ein, denn $11 \cdot 11 = 11^2 = 121$.

Wir erinnern uns jetzt daran, dass beim Quadrieren das Vorzeichen der Zahl keine Rolle spielt. Deshalb finden wir direkt eine zweite Lösung, nämlich die -11. Auch das überprüfen wir: $(-11) \cdot (-11) = (-11)^2 = 121$.

Wir haben also zwei Lösungen $+11$ und -11 der Gleichung $x^2 = 121$ gefunden.

Ob in der obigen Gleichung nun 121 steht oder eine andere Zahl, macht die Suche nach der Lösung höchstens rechnerisch aufwändiger, aber die Idee bleibt die gleiche.

2.2 Die Quadratwurzel

Weil wir es ständig mit Gleichungen der Form (1) zu tun haben werden, bekommt die Suche nach den Lösungen der Gleichung $x^2 = c$ einen eigenen Namen:

Die Quadratwurzel

> Ist c eine Zahl, dann ist $\sqrt{c}$ die nicht-negative Zahl, welche mit sich selbst multipliziert c ergibt.

$\sqrt{c}$ heißt **die Quadratwurzel aus** c (oder kürzer: Wurzel aus c).

Mit dieser Schreibweise ist $\sqrt{c}$ eine Lösung der Gleichung $x^2 = c$.

Dass keine Zahl mit sich selbst multipliziert kleiner als Null sein kann, sieht man sehr einfach. Deshalb kann es die Wurzel aus einer negativen Zahl nicht geben. Damit haben wir:

$$\text{Die Gleichung } x^2 = c \text{ hat } \begin{cases} \text{die Lösungen } x = \sqrt{c} \ \text{ und } \ x = -\sqrt{c}\,, & \text{falls } c > 0 \\ \text{die Lösung } x = 0\,, & \text{falls } c = 0 \\ \text{keine Lösung}\,, & \text{falls } c < 0 \end{cases}$$

In den folgenden Beispielen nutzen wir die Wurzel, um die Lösung der quadratischen Gleichung aus dem obigen Beispiel systematisch aufzuschreiben:

Beispiel 1. a) Wir suchen die Lösungen der Gleichung $x^2 = 625$:

$$\begin{aligned} x^2 &= 625 && \Big|\sqrt{} \\ x &= \sqrt{625} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{625} \\ x &= 25 \quad \text{oder} \quad x = -25 \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung sind also ± 25.

b) Wir suchen die Lösungen der Gleichung $x^2 = 60$:

$$\begin{aligned} x^2 &= 60 && \Big|\sqrt{} \\ x &= \sqrt{60} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{60} \\ x &\approx 7{,}746 \quad \text{oder} \quad x \approx -7{,}746 \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung sind also $\pm\sqrt{60} \approx \pm 7{,}746$.

Wenn die Wurzel einer Zahl nicht als Bruch oder ganze Zahl darstellbar ist, dann kann man als "exaktes" Ergebnis den Wurzelausdruck wie in Beispiel b) einfach stehen lassen.

2.3 Variationen der einfachen Gleichung

Wir sehen uns einige weitere Beispiele quadratischer Gleichungen an, die unserer ersten sehr ähneln

(2) $\boxed{x^2 - 32 = -7}$

(3) $\boxed{12x^2 = 192}$

(4) $\boxed{-3x^2 + 115 = 7}$

Diese Gleichungen lassen sich sehr einfach in die noch einfacherer Form überführen. Dazu bedenken wir, dass wir sie erst mit Hilfe von ⓪, ① und ② umformen dürfen.

Wir führen das an den Beispielen durch:

Beispiel 2. (2) Wir suchen die Lösungen der Gleichung $x^2 - 32 = -7$:

$$\begin{aligned} x^2 - 32 &= -7 && \Big| +32 \\ x^2 &= 25 && \Big|\sqrt{} \\ x &= \sqrt{25} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{25} \\ x &= 5 \quad \text{oder} \quad x = -5 \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung sind also ± 5.

(3) Wir suchen die Lösungen der Gleichung $12x^2 = 192$:

$$\begin{aligned} 12x^2 &= 192 && \mid :12 \\ x^2 &= 16 && \mid \sqrt{\ } \\ x &= \sqrt{16} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{16} \\ x &= \ 4 \text{ oder } \ x = -4 \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung sind also ± 4.

(4) Wir suchen die Lösungen der Gleichung $-3x^2 + 115 = 7$:

$$\begin{aligned} -3x^2 + 115 &= 7 && \mid -115 \\ -3x^2 &= -108 && \mid :(-3) \\ x^2 &= 36 && \mid \sqrt{\ } \\ x &= \sqrt{36} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{36} \\ x &= \ 6 \text{ oder } \ x = -6 \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung sind also ± 6.

2.4 Quadratischen Gleichungen in Scheitelpunktform

Wir gehen noch einen Schritt weiter und sehen uns eine "kompliziertere" Gleichung an:

$$(5) \quad \boxed{7(x+4)^2 - 100 = -37}$$

Wenn man genau hinsieht, dann unterscheidet diese Gleichung sich von der Gleichung (4) nur dadurch, dass das x "nicht alleine steht", sondern in der Form $(x+4)$. Deshalb beginnen wir auch genauso, wie bei der Lösung von (4):

Beispiel 3. (5) Wir suchen die Lösungen der Gleichung $7(x+4)^2 - 100 = -37$:

$$\begin{aligned} 7(x+4)^2 - 100 &= -37 && \mid +100 \\ 7(x+4)^2 &= 63 && \mid :7 \\ (x+4)^2 &= 9 && \mid \sqrt{\ } \\ x+4 &= \sqrt{9} \quad \text{oder} \quad x+4 = -\sqrt{9} \\ x+4 &= \ 3 \text{ oder } \ x+4 = -3 && \mid -4 \\ x &= -1 \quad \text{oder} \quad x = -7 \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung sind also -1 und -7.

Wir sehen also: die quadratische Gleichung in der Form (5) ist gar nicht kompliziert, sondern wir können sie sehr einfach lösen. Deshalb bekommt diese Form einen eigenen Namen:

Die Scheitelpunktform einer quadratischen Gleichung

Alle Beispiele (1)-(5) waren bis auf einfache Umformung Spezialfälle der quadratischen Gleichung

$$\boxed{a(x - x_s)^2 + y_s = 0}.$$

Dabei sind a, x_s und y_s feste Zahlen.

Diese spezielle Form heißt **Scheitelpunktform**.

- In (1) ist $a = 1$, $x_s = 0$ und $y_s = -121$
- In (2) ist $a = 1$, $x_s = 0$ und $y_s = -25$
- In (3) ist $a = 12$, $x_s = 0$ und $y_s = -192$
- In (4) ist $a = -3$, $x_s = 0$ und $y_s = 108$
- In (5) ist $a = 7$, $x_s = -4$ und $y_S = -63$

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass wir <u>jede</u> quadratische Gleichung in die Scheitelpunktform bringen können.