Frank Klinker

Quadratische Gleichungen

Teil 2: Die Normalform, die quadratische Ergänzung und die pq-Formel

1 Die Normalform einer quadratischen Gleichung

Wir sehen uns nochmal die Gleichung

$$(5) \quad \boxed{7(x+4)^2 - 100 = -37}$$

an, die in Scheitelpunkt vorliegt. Wir klammern aus und vereinfachen:

$$\begin{aligned}
7(x+4)^2 - 100 &= -37 && \big|\, 0 \ \text{(Binomische Formel)} \\
7(x^2+8x+16) - 100 &= -37 && \big|\, 0 \ \text{(ausklammern)} \\
7x^2+56x+112-100 &= -37 && \big|\, 0 \ \text{(zusammenfassen)} \\
7x^2+56x+12 &= -37 && \big|\, +37 \\
7x^2+56x+49 &= 0
\end{aligned}$$

Man kann jede quadratische Gleichung aus der Scheitelpunktform in so eine "sehr aufgeräumte" Form überführen. Deshalb bekommt sie einen eigenen Namen:

> **Die Normalform einer quadratischen Gleichung**
>
> Eine quadratische Gleichung lässt sich immer in der Form
>
> $$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$
>
> schreiben. Dabei sind a, b und c feste Zahlen.
>
> Diese Darstellung einer quadratischen Gleichung heißt **Normalform**.

2 Von der Normalform zur Scheitelpunktform: die quadratische Ergänzung

Um so quadratische Gleichung, die in Normalform vorliegt, zu lösen, können wir die Rechnung von oben rückwärts machen. Dadurch überführen wir die Gleichung zunächst in die Scheitelpunktform. Anschließend können wir dann wie in Beispiel (5) vorgehen.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 7. Februar 2024

Um diese "Rückwärtsrechnung" machen zu können, erinnern wir uns an die **binomische Formeln**:

$$u^2 \pm 2\,u\,v + v^2 = (u \pm v)^2\,.$$

Damit können wir ausgehend von der Normalform die Scheitelpunktform herleiten:

$$\begin{aligned}
& ax^2 + bx + c && \Big|\text{Klammere } a \text{ aus}\\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c && \Big|\text{schreibe komplizierter}\\
&= a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x\right) + c && \Big|\text{schreibe komplizierter durch geschicktes Ergänzen}\\
&= a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c && \Big|\text{Klammere den letzten Summanden aus}\\
&= a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c && \Big|\text{vereinfache den letzten Summanden}\\
&= a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - \frac{b^2}{4a} && \Big|\text{In der Klammer steht ein Binom}\\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}\\
&= \underset{\substack{\uparrow\\ a}}{\boxed{a}}\left(x - \underset{\substack{\uparrow\\ x_S}}{\boxed{-\frac{b}{2a}}}\right)^2 + \underset{\substack{\uparrow\\ y_S}}{\boxed{c - \frac{b^2}{4a}}}
\end{aligned}$$

Diese etwas kompliziert aussehende Rechnung heißt **quadratische Ergänzung**. Das liegt an dem dritten Schritt, in dem man durch geschicktes Ergänzen ein Binom erhält.

Beispiel 1. a) Wir berechnen die Scheitelpunktform und Lösungen der Gleichung $2x^2 - 8x - 42 = 0$:

$$\begin{aligned}
2x^2 - 8x - 42 &= 0\\
2(x^2 - 4x) - 42 &= 0\\
2(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) - 42 &= 0\\
2(x^2 - 4x + 4) - 8 - 42 &= 0\\
2(x-2)^2 - 50 &= 0 && \Big|\text{Dies ist die SPF. Ab jetzt lösen} \quad \Big| + 50\\
2(x-2)^2 &= 50 && \Big| : 2\\
(x-2)^2 &= 25 && \Big|\sqrt{}\\
x - 2 = \sqrt{25} \quad &\text{oder} \quad x - 2 = -\sqrt{25}\\
x - 2 = 5 \quad &\text{oder} \quad x - 2 = -5 && \Big| + 2\\
x = 7 \quad &\text{oder} \quad x = -3 && \Big|\text{Die Lösungen!}
\end{aligned}$$

b) Wir berechnen die Scheitelpunktform und Lösungen der Gleichung $-5x^2 - 30x + 135 = 0$:

$$-5x^2 - 30x + 135 = 0$$

$$
\begin{aligned}
-5(x^2+6x)+135&=0\\
-5(x^2+6x+3^2-3^2)+135&=0\\
-5(x^2+6x+9)+45+135&=0\\
-5(x+3)^2+180&=0 && \Big|\,\text{Dies ist die SPF. Ab jetzt lösen} \quad \Big|-180\\
-5(x+3)^2&=-180 && \Big|\,:(-5)\\
(x+3)^2&=36 && \Big|\,\sqrt{}\\
x+3=\sqrt{36} \quad \text{oder} \quad x+3&=-\sqrt{36}\\
x+3=6 \quad \text{oder} \quad x+3&=-6 && \Big|-3\\
x=3 \quad \text{oder} \quad x&=-9 && \Big|\,\text{Die Lösungen!}
\end{aligned}
$$

Die quadratische Ergänzung lässt sich in einem einfachen Algorithmus zusammenfassen, der uns aus der Normalform die Scheitelpunktform gibt:

> **Der "$-\frac{b}{2a}$-Algorithmus" zur quadratischen Ergänzung**
>
> Liegt die quadratische Gleichung in Normalform
>
> $$ax^2+bx+c=0$$
>
> vor, dann erhalten wir die Scheitelpunktform
>
> $$a(x-x_s)^2+y_s=0\,,$$
>
> indem wir wie folgt vorgehen:
>
> - Berechne $x_s=-\dfrac{b}{2a}$
> - Damit berechne dann $y_s=ax_s^2+bx_s+c$
> - Übernehme a

Beispiel 2. a) Wir berechnen die Scheitelpunktform von $2x^2-8x-42=0$ mit dem Algorithmus:

Es ist $a=2, b=-8$ und deshalb

$$
\begin{aligned}
x_s&=-\frac{b}{2a}=-\frac{-8}{2\cdot 2}=2\,,\\
y_s&=2x_s^2-8x_s-42=2\cdot 2^2-8\cdot 2-42=8-16-42=-50\,.
\end{aligned}
$$

Das gibt die Scheitelpunktform

$$2(x-2)^2-50=0\,.$$

Die Lösungen ergeben sich dann wie in Beispiel 1.a) zu $7; -3$.

b) Wir berechnen die Scheitelpunktform von $-5x^2-30x+135=0$ mit dem Algorithmus:

Es ist $a = -5, b = -30$, also

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-30}{2 \cdot (-5)} = -3\,,$$
$$y_s = -5x_s^2 - 30x_s + 135 = -5 \cdot (-3)^2 - 30 \cdot (-3) + 135 = -45 + 90 + 135 = 180\,.$$

Das gibt die Scheitelpunktform

$$-5(x+3)^2 + 180 = 0\,.$$

Die Lösungen ergeben sich dann wie in Beispiel 1.a) zu 3; −9.

c) Wir berechnen die Scheitelpunktform von $-x^2 + 8x - 16 = 0$ mit dem Algorithmus:

Es ist $a = -1, b = 8$, also:

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-1)} = 4\,,$$
$$y_s = -x_s^2 + 8x_s - 16 = -4^2 + 8 \cdot 4 - 16 = -16 + 32 - 16 = 0\,.$$

Das gibt schließlich die Scheitelpunktform

$$-(x-4)^2 = 0\,.$$

Wir lösen die Gleichung:

$$\begin{aligned} -(x-4)^2 &= 0 && \Big| : (-1) \\ (x-4)^2 &= 0 && \Big| \sqrt{} \\ x - 4 &= \sqrt{0} \\ x - 4 &= 0 && \Big| + 4 \\ x &= 4 && \Big| \text{Hier nur eine Lösung!} \end{aligned}$$

d) Wir berechnen die Scheitelpunktform von $x^2 + 10x + 40 = 0$ mit dem Algorithmus:

Es ist $a = 1, b = 10$, also

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \cdot 1} = -5\,,$$
$$y_s = x_s^2 + 10x_s + 40 = (-5)^2 + 10 \cdot (-5) + 40 = 25 - 50 + 40 = 15\,.$$

Das gibt die Scheitelpunktform

$$(x-5)^2 + 15 = 0\,,$$

die wir lösen:

$$\begin{aligned} (x-5)^2 + 15 &= 0 && \Big| - 15 \\ (x-5)^2 &= -15 && \Big| \sqrt{} \\ x - 5 &= \sqrt{-15} \quad \text{oder } x - 5 = -\sqrt{-15} && \Big| \text{Hier \underline{keine} Lösung!} \end{aligned}$$

3 Ein Spezialfall und die pq-Formel

Wir sehen uns den Spezialfall einer quadratischen Gleichung an, in der $a = 1$ ist. Um diesen Fall hervorzuheben, schreiben wir p und q statt b und c:

$$x^2 + px + q = 0\,.$$

Der obige Algorithmus liefert uns für die Scheitelpunktform:

$$\underline{x_s = -\frac{p}{2}}\,.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}\underline{y_s} &= x_s^2 + px_s + q = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 + p\cdot\left(-\frac{p}{2}\right) + q = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = -\frac{p^2}{4} + q \\ &\underline{= q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\,.\end{aligned}$$

Zusammen gibt das die Scheitelpunktform

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0\,.$$

Diese Gleichung lösen wir nun:

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= 0 && \Big| - q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q && \Big|\sqrt{} \\ x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{oder} \quad x + \frac{p}{2} &= -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} && \Big| - \frac{p}{2} \\ x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{oder} \quad x &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\end{aligned}$$

Die "*pq*-Formel" zum Lösen quadratischer Gleichungen

Diese Formeln sind sehr praktisch, wenn man quadratische Gleichungen lösen möchte. Aus diesem Grund hat sie einen eigenen Namen: ***pq*-Formel**

Die Lösungen der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

sind

$$\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Bemerkung 3. Ist die Gleichung in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ gegeben wobei $a \neq 1$ ist, dann kann man die pq-Formel trotzdem verwenden:
Dazu berechnet man $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ und setzt das in die pq-Formel ein.

Beispiel 4. a) Wir suchen die Lösungen von $x^2 + 8x - 48 = 0$.

Hier ist $p = 8$ und $q = -48$ und damit berechnen wir die Lösungen der Gleichung:

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
&= -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - (-48)} \\
&= -4 \pm \sqrt{16 + 48} \\
&= -4 \pm \sqrt{64} \\
&= -4 \pm 8 \\
x &= 4 \quad \text{oder } x = -12 \qquad \Big| \text{Die Lösungen!}
\end{aligned}$$

b) Wir suchen die Lösungen von $x^2 + 10x + 40 = 0$.

Hier ist $p = 10$ und $q = 40$ und damit sind die Lösungen

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
&= -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 40} \\
&= -5 \pm \sqrt{25 - 40} \\
&= -5 \pm \sqrt{-15} \qquad \Big| \text{Es gibt \underline{keine} Lösung}
\end{aligned}$$

c) Wir suchen die Lösungen von $-5x^2 - 30x + 135 = 0$.

Hier ist $a = -5, b = -30, c = 135$ und deshalb $p = \frac{b}{a} = \frac{-30}{-5} = 6$ und $q = \frac{c}{a} = \frac{135}{-5} = -27$. Damit berechnen wir die Lösungen der Gleichung:

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
&= -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - (-27)} \\
&= -3 \pm \sqrt{9 + 27} \\
&= -3 \pm \sqrt{36} \\
&= -3 \pm 6 \\
x &= 3 \quad \text{oder } x = -9 \qquad \Big| \text{Die Lösungen!}
\end{aligned}$$

d) Wir suchen die Lösungen von $-x^2 + 8x - 16 = 0$.

Hier ist $a = -1, b = 8, c = -16$ und deshalb $p = \frac{b}{a} = \frac{8}{-1} = -8$ und $q = \frac{c}{a} = \frac{-16}{-1} = 16$. Mit diesen Werten erhalten wir die Lösungen der Gleichung:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 16} \\
&= 4 \pm \sqrt{16 - 16} \\
&= 4 \pm \sqrt{0} \\
&= 4 \pm 0 \\
x &= 4 && \Big| \text{Die einzige Lösung!}
\end{aligned}
$$